Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
филиал ФГБОУ ВО «РГГМУ» в г. Туапсе

Кафедра «Метеорологии, экологии и экономического обеспечения деятельности предприятий природопользования»

Рабочая программа по дисциплине

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основная профессиональная образовательная программа
высшего образования программы бакалавриата по направлению подготовки

05.03.05 «Прикладная гидрометеорология»

Направленность (профиль):
Прикладная метеорология

Квалификация:
Бакалавр

Форма обучения
Очная, заочная

Год поступления 2019, 2020

Согласовано
Руководитель ОПОП
«Прикладная гидрометеорология»
_______________ Цай С.Н.

Утверждаю
Директор филиала ФГБОУ ВО «РГГМУ» в г. Туапсе _________ Аракелов М.С.

Рассмотрена и утверждена на заседании кафедры
31 августа 2020 г., протокол № 1

Зав. кафедрой ____________ Цай С.Н.

Авторы-разработчики:
______________________ Минасян А.Г.
____

Туапсе 2020

ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Семестр	Всего по ФГОС Час/ ЗЕТ	Аудиторных Час	Лекций, Час	Практич. занятий, Час	Лаборат. работ, Час	СРС, Час	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
7	144/4	56	28	-	28	88	Экзамен
Итого	144/4	56	70		28	88	

ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Курс	Всего по ФГОС Час/ ЗЕТ	Аудиторных Час	Лекций, Час	Практич. занятий, Час	Лаборат. работ, Час	СРС, Час	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
4	144/4	14	6		8	130	Экзамен
Итого	144/4	14	6		8	130	

1. Цели и задачи учебной дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины:

Целями освоения дисциплины Вычислительная математика является развитие способностей к логическому и алгоритмическому мышлению, обучение основным математическим понятиям и методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений практических задач, методам обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов.

Задачи дисциплины: Задачи дисциплины: формирование общепрофессиональной компетенции при освоении ОПОП ВО, реализующей ФГОС ВО по направлению подготовки 03.05.05 «Прикладная гидрометеорология»:

- ознакомить с основными понятиями и методами вычислительной математики,
- раскрыть роль и значение численных методов при решении прикладных инженерных задач.

Компетентностный подход предполагает овладение базовым набором знаний, умений и практических навыков численных методов математического моделирования.

1.2. Краткая характеристика дисциплины

Дисциплина «Численные методы математического моделирования» относится базовой части программы подготовки бакалавров по направлению 05.03.05 «Прикладная гидрометеорология»
Изучение дисциплины «Численные методы математического моделирования» основывается на базе знаний, полученных студентами курсах в ходе освоения дисциплин «Математика», «Вычислительная математика», «Информатика», «Механика жидкости и газа»

Дисциплина «Численные методы математического моделирования» изучается на втором году обучения. Приобретенные в результате изучения дисциплины знания, умения и навыки используются при изучении дисциплин профессионального цикла.

Целью освоения дисциплины «Численные методы математического моделирования» является ознакомление бакалавров прикладной гидрометеорологии с методами краткосрочного и среднесрочного гидродинамического (численного) предсказания погоды, основанными на интегрировании системы уравнений гидротермодинамики атмосферы.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

2.1. Требования к уровню освоения дисциплины

Требованиями к уровню освоения дисциплины является достижение следующих результатов образования (РО):

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- общее представление о предмете, структуре дисциплины «Численные методы математического моделирования», историю ее развития;
- современные методы обработки информации, а также методы решения обратных задач в гидрометеорологии, принципы и методы составления и хранения документации;
- основные численные методы решения системы уравнений гидротермодинамики земной атмосферы; - методы параметризации процессов подсеточного масштаба, влияющих на динамику атмосферы.

Уметь:

- формулировать задачи гидродинамического прогноза состояния атмосферы на языке дифференциальных уравнений, используя законы механики сплошной среды и термодинамики; --- применять методы аппроксимации дифференциальных уравнений конечными разностями и спектральные модели;
- использовать численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных;

Владеть:

- навыками самостоятельной работы со специальной литературой;
- навыками работы с геоинформационными банками данных метеорологических наблюдений;
- методами решения системы уравнений гидротермодинамики атмосферы;
- методами решения задач параметризации атмосферных процессов

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие общекультурные и профессиональные компетенции при освоении ОПОП ВО, реализующей ФГОС ВО:

Общепрофессиональные

ОПК-1 способностью представить современную картину мира на основе знаний основных положений, законов и методов естественных наук, физики и математики.

ОПК-3 способностью анализировать и интерпретировать данные натурных и лабораторных наблюдений, теоретических расчетов и моделирования

2.2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Численные методы математического моделирования» является одной из дисциплин базовой части блока 1 рабочего учебного плана программы подготовки бакалавров по направлению 05.03.05 «Прикладная гидрометеорология». Для успешного изучения дисциплины «Численные методы математического моделирования» студентам необходимо предварительно изучить стандартный курс высшей математики, включающий следующие разделы: аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, вычислительная математика.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются: **знание** основ линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, **умение** использовать приобретённые знания из курса математики для анализа явлений и процессов, происходящие в природе, **владение** основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации; описывать результаты, формулировать выводы; обобщать полученные результаты.

Дисциплина «Численные методы математического моделирования» изучается на четвертом году обучения. Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания дисциплин Математика, Информатика, Вычислительная математика и служит основой для освоения дисциплины: Природная среда и гидрометеорологические процессы, Прикладная метеорология и др.

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся;

ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 часа. Контактная работа составляет 56 часов: 28– лекции, 28- лабораторных работ; самостоятельная работа студента – 88 часов.

№ модуля образовательной программы	№ раздела, темы	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы				
			Лекции	Практические занятия	Лабораторная работа	СРС	Всего часов
1	**1.**	**Раздел 1. Введение.**	**6**		**6**	**14**	**26**
	1.1.	Тема 1.1.Важность численных методов прогноза в метеорологии.	1		1	2	4
	1.2	Тема 1.2Введение в математическое моделирование	1		1	2	4
	1.3	Тема 1.3Основные уравнения в декартовой системе координат.	1		1	2	4
	1.4	Тема 1.4 Сферическая система координат.	1		1	2	5
	1.5	Тема 1.5 Уравнения Рейнольдса	1		1	3	5
	1.6	Тема 1.6Метод сеток.	1		1	3	5
2	**2**	**Раздел 2. Приближенные числа и действия над ними**	**1**		**1**	**3**	**5**
	2.1.	Тема 2.1Дискретизация Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений	1		1	3	5
3	**3**	**Раздел 3. Интерполяция функций**	**1**		**1**	**4**	**6**
	3.1	Тема 3.1 Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Кусочная интерполяция Среднеквадратичное приближение. Метод сплайнов	1		1	4	6
4		**Раздел 4. Численное решение нелинейных уравнений**	**1**		**1**	**4**	**6**

	4.1	Тема 4.1Численное решение нелинейных уравнений. Численное решение нелинейных уравнений.	1		1	4	6
5		**Раздел 5. Численное решение систем линейных уравнений**	**1**		**1**	**4**	**6**
	5.1	Тема 5.1Численное решение систем линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонк. Итерационные методы, методы Якоби, Зейделя, оптимизации параметра	1		1	4	6
6		**Раздел 6. Численное решение систем нелинейных уравнений**	**1**		**1**	**4**	**6**
	6.1	Тема 6.1Формулировка задачи Метод Ньютона. Метод простых итераций Варианты итерационных схем Погрешности методов	1		1	4	6
7		**Раздел 7. Численное интегрирование**	**2**		**2**	**8**	**12**
	7.1	Тема 7.1Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость.	1		1	4	6
	7.2	Тема 7.2Численное интегрирование. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.	1		1	4	6
8		**Раздел 8. Численное дифференцирование**	**1**		**1**	**4**	**6**
	8.1	Тема 8.1. Построение формул для приближенного Вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.	1		1	4	6
9		**Раздел 9. Численные методы решения обыкновенных ДУ**	**5**		**5**	**19**	**29**
	9.1	Тема 9.1. Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера	1		1	3	5
	9.2	Тема 9.2. Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности	1		1	4	6
	9.3	Тема 9.3. Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутта.	1		1	4	6

	9.4	Тема 9.4. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара	1		1	4	6
	9.5	Тема 9.5. Специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков	1		1	4	6
10		**Раздел 10. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.**	**6**		**6**	**16**	**28**
	10.1	Тема 10.1. Численное решение краевых задач. Линейный случай	2		3	8	13
	10.2	Тема 10.2. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2		1	4	7
	10.3	Тема 10.3. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи. Элементы теории разностных уравнений.	2		2	4	8
11		**Раздел 11. Процедуры параметризации.**	**3**		**3**	**8**	**14**
	11.1	Тема 11.1. Параметризация турбуленции.	1,5		1,5	4	7
	11.2	Тема 12.2. Параметризация лучистого теплообмена.	1,5		1,5	4	7
ИТОГО:			**28**		**28**	**88**	**144**

ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 часа. Контактная работа составляет 14 часов: 6 – лекции, 8 лабораторных работ, самостоятельная работа студента – 130 часов.

№ модуля образовательной программы	**№ раздела, темы**	**Наименование раздела дисциплины**	**Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы**				
			Лекции	**Практические занятия**	**Лабораторная работа**	**СРС**	**Всего часов**
1		**Введение.**	0,5			9	**9,5**
2		**Приближенные числа и действия над ними**	0,5		2	10	**12,5**
3		**Интерполяция функций**	0,5			10	**10,5**
4		**Численное решение нелинейных**	0,5		2	10	**12,5**

		уравнений					
5		**Численное решение систем линейных уравнений**	0,5		2	13	**15,5**
6		**Численное решение систем нелинейных уравнений**	0,5			13	**13,5**
7		**Численное интегрирование**	0,5			13	**13,5**
8		**Численное дифференцирование**	0,5		2	13	**15,5**
9		**Численные методы решения обыкновенных ДУ**	0,5			13	**13,5**
10		**Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.**	1			13	**14**
11		**Процедуры параметризации.**	0,5			13	**13,5**
ИТОГО:			**6**		**8**	**130**	**144**

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

4.1. Теоретический курс (ОПК-1,ОПК-3)

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Объем часов		Раздел, тема учебной дисциплины, содержание темы
		Лекции	СРС	
				Раздел 1. Введение.
1	**1**	1	2	Тема 1.1.Важность численных методов прогноза в метеорологии.
		1	2	Тема 1.2Введение в математическое моделирование
		1	2	Тема 1.3Основные уравнения в декартовой системе координат.
		1	2	Тема 1.4 Сферическая система координат.
		1	2	Тема 1.5 Уравнения Рейнольдса
		1	2	Тема 1.6Метод сеток.
				РАЗДЕЛ 2. Приближенные числа и действия над ними
2	**2**	1	2	Тема 2.1Дискретизация Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений
				Раздел 3. Интерполяция функций
3	3	1	2	Тема 3.1 Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Кусочная интерполяция Среднеквадратичное приближение. Метод сплайнов

				Раздел 4. Численное решение нелинейных уравнений
4	**4**	1	2	Тема 4.1.Численное решение нелинейных уравнений. Численное решение нелинейных уравнений. Методы отделения корней, сканирования, деления отрезка пополам, хорд, Ньютона, простых итераций, релаксаций. Графическая интерпретация рассмотренных методов. Погрешности методов.
				Раздел 5.Численное решение систем линейных уравнений
5	**5**	1	2	Тема 5.1Численное решение систем линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонк Итерационные методы, методы Якоби, Зейделя, оптимизации параметра
				Раздел 6. Численное решение систем нелинейных уравнений
6	**6**	1	2	Тема 6.1Формулировка задачи Метод Ньютона. Метод простых итераций Варианты итерационных схем Погрешности методов
				Раздел 7. Численное интегрирование
7	**7**	1	2	Тема 7.1Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость.
		1	2	Тема 7.2Численное интегрирование. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.
				Раздел 8. Численное дифференцирование
8	**8**	1	2	Тема 8.1. Построение формул для приближенного Вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.
				Раздел 9. Численные методы решения обыкновенных ДУ
9	**9**	1	2	Тема 9.1. Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера
		1	2	Тема 9.2. Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности
		1	2	Тема 9,3. Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутта.
		1	2	Тема 9.4. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара
		1	2	Тема 9.5. Специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков
				Раздел 10. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.

10	**10**	1	2	Тема 10.1Численное решение краевых задач. Линейный случай
		2	2	Тема 10.2. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.
		2	2	Тема 10.3. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи. Элементы теории разностных уравнений.
				Раздел 11. Процедуры параметризации
11	**11**	2	2	Тема 11.1. Параметризация турбуленции.
		2	2	Тема 11.2. Параметризация лучистого теплообмена.
Всего		**28**	**48**	

ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ
4.1. Теоретический курс (ОПК-1,ОПК-3)

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Объем часов		Раздел, тема учебной дисциплины, содержание темы
		Лекции	СРС	
				Раздел 1. Введение.
1	**1**	**0,5**	10	.Важность численных методов прогноза в метеорологии. Введение в математическое моделирование Основные уравнения в декартовой системе координат. Сферическая система координат. Уравнения Рейнольдса Метод сеток.
				Раздел 2. .Приближенные числа и действия над ними
2	**2**	**0,5**	4	Дискретизация Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений
				Раздел 3. Интерполяция функций
3	3	**0,5**	6	Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Кусочная интерполяция Среднеквадратичное приближение. Метод сплайнов
				Раздел 4. Численное решение нелинейных уравнений
4	**4**	0,5	4	Численное решение нелинейных уравнений. Численное решение нелинейных уравнений. Методы отделения корней, сканирования, деления отрезка пополам, хорд, Ньютона, простых итераций, релаксаций. Графическая интерпретация

				рассмотренных методов. Погрешности методов.
				Раздел 5.Численное решение систем линейных уравнений
5	**5**	0,5	4	Численное решение систем линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонк Итерационные методы, методы Якоби, Зейделя, оптимизации параметра
				Раздел 6. Численное решение систем нелинейных уравнений
6	**6**	0,5	8	Формулировка задачи Метод Ньютона. Метод простых итераций Варианты итерационных схем Погрешности методов
				Раздел 7. Численное интегрирование
7	**7**	0,5	4	Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость. Численное интегрирование. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.
				Раздел 8. Численное дифференцирование
8	**8**	0,5	2	Построение формул для приближенного Вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.
				Раздел 9. Численные методы решения обыкновенных ДУ
9	**9**	0,5	8	Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутта. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара Специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков
				Раздел 10. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.

10	**10**	0,5	10	Численное решение краевых задач. Линейный случай Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи. Элементы теории разностных уравнений.
				Раздел 11. Процедуры параметризации
11	**11**	1	10	Параметризация турбуленции. Параметризация лучистого теплообмена.
Всего		**6**	**70**	

4Лабораторные работы (ОПК-1,ОПК-3)
Очная форма обучения

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Наименование лабораторной работы	Формы контроля выполнения работы	Объем часов	
				Аудиторных	СРС
1	2	Лабораторная работа 1. Основы теории погрешностей	отчет, защита лабораторной работы	3	4
2	3	Лабораторная работа 2 Приближение функций Метод наименьших квадратов	отчет, защита лабораторной работы	3	4
3	4	Лабораторная работа 3 Итерационные методы решения нелинейного уравнения Отделение корней уравнения , метод дихотомии (деления отрезка пополам) , метод простых итераций	отчет, защита лабораторной работы	3	4
4	5	Лабораторная работа 4 Итерационные методы решения систем линейных уравнений	отчет, защита лабораторной работы	3	4
5	6	Лабораторная работа 5 Итерационные методы решения нелинейного уравнения Метод секущих, метод хорд, метод Ньютона.	отчет, защита лабораторной работы	3	4
6	7	Лабораторная работа 6 Численное интегрирование	отчет, защита лабораторной работы	3	5
7	**8**	Лабораторная работа 7	отчет, защита	**3**	**5**

		Численное дифференцирование	лабораторной работы		
8	9	Лабораторная работа 8 Численное решение задачи коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого	отчет, защита лабораторной работы	**3**	**5**
9	**10**	Лабораторная работа 8 Численное решение задачи коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	отчет, защита лабораторной работы	**4**	**5**
		Итого		**28**	**40**

Заочная форма обучения

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Наименование лабораторной работы	Формы контроля выполнения работы	Объем часов	
				Аудиторных	**СРС**
1	2	Лабораторная работа 1. Основы теории погрешностей	отчет, защита лабораторной работы	2	15
3	4	Лабораторная работа 3 Итерационные методы решения нелинейного уравнения Отделение корней уравнения , метод дихотомии (деления отрезка пополам) , метод простых итераций	отчет, защита лабораторной работы	2	15
4	5	Лабораторная работа 4 Итерационные методы решения систем линейных уравнений	отчет, защита лабораторной работы	2	10
7	8	Лабораторная работа 6 Численное дифференцирование	отчет, защита лабораторной работы	**2**	20
		Всего		**8**	**60**

4.3. Курсовые работы по дисциплине рабочим учебным планом не предусмотрены

4.4. Самостоятельная работа студента (ОПК-1,ОПК-3)

ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Раздел дисциплины	№ п/п	Вид СРС	Формы контроля	Трудоемкость, часов
Раздел 1	1	Тема 1.4 Сферическая система координат	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	14
	2	Тема 1.5 Уравнения Рейнольдса		
	3	Тема 1.6Метод сеток.		

Раздел 2	5	Тема 2.1Дискретизация Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	3
Раздел 3	8	Тема 3.1 Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Кусочная интерполяция Среднеквадратичное приближение. Метод сплайнов	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	4
Раздел 4		Тема 4.1Численное решение нелинейных уравнений. Численное решение нелинейных уравнений.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	4
Раздел 5		Тема 5.1Численное решение систем линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонк. Итерационные методы, методы Якоби, Зейделя, оптимизации параметра	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	4
Раздел 6		Тема 6.1Формулировка задачи Метод Ньютона. Метод простых итераций Варианты итерационных схем Погрешности методов	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	4
Раздел 7		Тема 7.1Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	8
		Тема 7.2Численное интегрирование. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.		
Раздел 8		Тема 8.1. Построение формул для приближенного Вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	4
Раздел 9		Тема 9.1. Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	19
		Тема 9.2. Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности		
		Тема 9.3. Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутта.		
		Тема 9.4. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна,		

		метод Пикара		
		Тема 9.5. Специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков		
Раздел 10		Тема 10.1. Численное решение краевых задач. Линейный случай	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	16
		Тема 10.2. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.		
		Тема 10.3. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи. Элементы теории разностных уравнений.		
Раздел 11		Тема 11.1. Параметризация турбуленции.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	8
		Тема 12.2. Параметризация лучистого теплообмена.		
		Всего		**88**

ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

Раздел дисциплины	№ п/п	Вид СРС	Формы контроля	Трудоемкость, часов
Раздел 1	1	Тема 1.4 Сферическая система координат	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	9
	2	Тема 1.5 Уравнения Рейнольдса		
	3	Тема 1.6Метод сеток.		
Раздел 2	5	Тема 2.1Дискретизация Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	10
Раздел 3	8	Тема 3.1 Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Кусочная интерполяция Среднеквадратичное приближение. Метод сплайнов	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	10
Раздел 4		Тема 4.1Численное решение нелинейных уравнений. Численное решение нелинейных уравнений.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	10
Раздел 5		Тема 5.1Численное решение систем	Решение	13

		линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонк. Итерационные методы, методы Якоби, Зейделя, оптимизации параметра	примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	
Раздел 6		Тема 6.1Формулировка задачи Метод Ньютона. Метод простых итераций Варианты итерационных схем Погрешности методов	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	13
Раздел 7		Тема 7.1Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	13
		Тема 7.2Численное интегрирование. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.		
Раздел 8		Тема 8.1. Построение формул для приближенного Вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	13
Раздел 9		Тема 9.1. Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	13
		Тема 9.2. Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности		
		Тема 9.3. Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутта.		
		Тема 9.4. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара		
		Тема 9.5. Специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков		
Раздел 10		Тема 10.1. Численное решение краевых задач. Линейный случай	Решение примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	13
		Тема 10.2. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.		
		Тема 10.3. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи. Элементы теории разностных уравнений.		
Раздел 11		Тема 11.1. Параметризация турбуленции.	Решение	13

		Тема 12.2. Параметризация лучистого теплообмена.	примеров Срок выполнения: к следующему занятию.	
		Итого		**130**

Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

-Методические рекомендации по получению, обработке и хранению приобретенной информации

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов включают:

- Методические рекомендации по написанию и проработке конспекта
- Методические рекомендации по подготовке к тестам
- Методические рекомендации по подготовке к практическим работам (решение задач)
- Методические рекомендации по подготовке к экзамену (Приложение 2)

4.5. Рефераты учебным планом не предусмотрены.

5. Образовательные технологии

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих **видов организации учебного процесса:**

Информационная лекция — сообщаются сведения, предназначенные для запоминания.

Проблемная лекция - в отличие от информационной лекции, на проблемной лекции знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть». Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. При этом выдвигаемая проблема требует не однотипного решения, готовой схемы которого нет. Данный тип лекции строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. На подобных лекциях обязателен диалог преподавателя и студентов.

Практическое занятие – решение конкретных задач на основании теоретических и фактических знаний, направленное в основном на закрепление теоретических знаний и приобретение новых практических навыков, в соответствии с разделом 3.2 «Практические занятия»

Кейс-метод — учебный материал подается студентам в виде проблем (кейсов), а знания приобретаются в результате активной и творческой работы: самостоятельного осуществления целеполагания, сбора необходимой информации, ее анализа с разных точек зрения, выдвижения гипотезы, выводов, заключения, самоконтроля процесса получения знаний и его результатов.

Самостоятельная работа – изучение студентами теоретического материала, подготовка к лекциям, практическим и семинарским занятиям, оформление конспектов лекций, написание рефератов, работа в электронной образовательной среде и др. для приобретения новых теоретических и фактических знаний, теоретических и практических умений, в соответствии с разделом 3.5. «Самостоятельная работа студентов»

Консультация - индивидуальное общение преподавателя со студентом, руководство его деятельностью с целью передачи опыта, углубления теоретических и фактических знаний, приобретенных студентом на лекциях, в результате самостоятельной работы и др., в соответствии с графиком индивидуальных консультаций.

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих **видов образовательных технологий:**

1. **Case-study -** анализ реальных проблемных ситуаций, имевших место в соответствующей области профессиональной деятельности, и поиск вариантов лучших решений.
2. **Игра** – ролевая имитация студентами реальной профессиональной деятельности с

выполнением функций специалистов на различных рабочих местах.

3. **Проблемное обучение** – стимулирование студентов к самостоятельному приобретению знаний, необходимых для решения конкретной проблемы.

4. **Междисциплинарное обучение** – использование знаний из разных областей, их группировка и концентрация в контексте решаемой задачи.

Опережающая самостоятельная работа – изучение студентами нового материала до его изучения в ходе аудиторных занятий.

5.3.5.1 Лабораторные работы по разделам(ОПК-1)

Лабораторная работа 1-2 «Основы теории погрешностей» «Приближение Функций»

ЦЕЛЬ: Ознакомиться с основными понятиями теории погрешностей.

ЗАДАЧА

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$.

Вариант	a_n	Вариант	a_n
0	$\frac{48}{5(n^2+6n+5)}$	5	$\frac{24}{n^2+4n+3}$
1	$\frac{60}{n^2+6n+8}$	6	$\frac{144}{5(n^2+6n+8)}$
2	$\frac{36}{11(n^2+5n+4)}$	7	$\frac{32}{n^2+9n+20}$
3	$\frac{46}{n^2+5n+6}$	8	$\frac{84}{13(n^2+14n+48)}$
4	$\frac{12}{5(n^2+6n+8)}$	9	$\frac{20}{n^2+4n+3}$

Алгоритм решения и реализация в ms excel

Алгоритм

Найти сумму ряда аналитически.

Используя функцию $S(N) = \sum_{n=1}^{N} a_n$, вычислить значения частичных сумм ряда при указанных значениях N.

Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности.

Пусть a – точное значение, a^* – приближенное значение некоторой величины. Абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называется величина $\Delta a^* = |a - a^*|$.

Определить количество верных цифр в $S(N)$.

Значащими цифрами числа a^* называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру числа a^* называют верной, если абсолютная погрешность числа не превышает единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Приближенное число можно представить в виде конечной десятичной дроби

$$a^* = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + a_{m-2}10^{m-2} + \ldots + a_{m-n+1}10^{m-n+1} \qquad a_m \neq 0 .$$

Тогда, если цифра a_k в изображении числа a^* верная, то выполняется неравенство

$|a - a^*| \le \omega 10^k$, $\omega \le 1$, чаще всего $\omega = 0{,}5$.

Аналитическое решение

Дан ряд $\sum_{n=0}^{N} \frac{72}{n^2+5n+4}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{72}{n^2+5n+4} = 72\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{72}{3}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right) =$$

$$= 24 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \ldots\right.$$

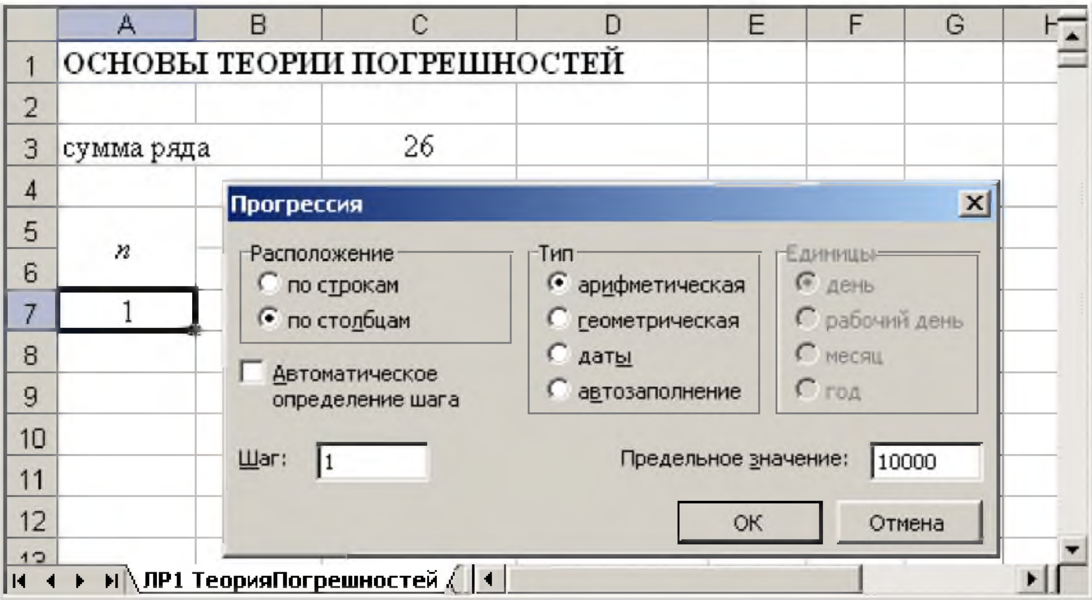
$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right)\right] =$$

$$= 24 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right) = 24 \cdot \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 24 \cdot \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right) = 24 \cdot \frac{13}{12} = 26.$$

Реализация в MS Excel

Для расчета суммы ряда создать вспомогательный столбец n: **Правка – Заполнить – Прогрессия…**:



Провести расчет:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ									
2										
3	сумма ряда		26							
4										
5	n	N	Частичная сумма ряда	Погрешность	Разряды					Количество верных цифр
6					1	0	-1	-2	-3	
7	1	10	20,43956044	5,56	1	0	0	0	0	1
8	2	100	25,30092694	0,699	1	1	0	0	0	2
9	3	1000	25,92821531	0,072	1	1	1	0	0	3
10	4	10000	25,99280216	0,0072	1	1	1	1	0	4
11	5									
12	6									

ЛР1 ТеорияПогрешностей

Вид рабочего листа с формулами

C7 | f_x | {=СУММ(72/($A$7:ИНДЕКС($A$7:$A$10006;B7)^2+5*$A$7:ИНДЕКС($A$7:$A$10006;B7)+4))}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ									
2										
3	сумма ряда		26							
4										
5	n	N	Частичная сумма ряда	Погрешность	Разряды					Количество верных цифр
6					1	0	-1	-2	-3	
7	1	10	{=СУММ(72/(	=ABS($C$3-C7)	=ЕСЛИ($D7<=10^E$6;1;0)					=СУММ(E7:I7)
8	2	100								
9	3	1000								
10	4	10000								
11	5									

ЛР1 ТеорияПогрешностей

Фигурные скобки означают, что соответствующая формула выводится массивом, т. е. с использованием комбинации Ctrl + Shift + Enter.

Лабораторная работа 3-4

Итерационные методы решения нелинейного уравнения

Цель

Ознакомиться с численными методами решения конечных уравнений и их реализацией в MS Excel.

Задача

Решить трансцендентное уравнение с точностью ε одним из методов:

1) половинного деления, $\varepsilon = 10^{-3}$;
2) простой итерации, $\varepsilon = 10^{-6}$;
3) Ньютона (касательных), $\varepsilon = 10^{-9}$;
4) секущих, $\varepsilon = 10^{-9}$;
5) хорд, $\varepsilon = 10^{-9}$.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
0	$x^2 - e^x = 2$	5	$x^2 - \cos(2 + x) = 1$
1	$3\sin(x + 0{,}7) - 0{,}5x = 0$	6	$x\ln(x+1) = 1$
2	$(x-2)\ln x = 1$	7	$\ln(x+1) - (x-2)^2 = 1$
3	$\cos x - (x-1)^2 = 0$	8	$2\ln x - 0{,}5x + 1 = 0$
4	$5\sin x = x + \ln x$	9	$x^2 - 3\sin x = 0$

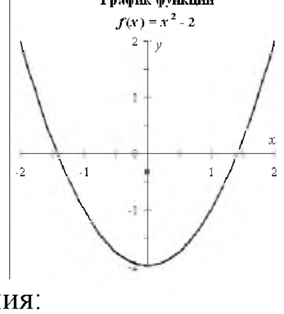
Алгоритмы методов и их реализация в ms excel

Отделение корней уравнения

Реализация в MS Excel

Уравнение $x^2 - 2 = 0$.

Графическое отделение корней:



Аналитическое отделение корней уравнения:

рассматриваемая функция $f(x) = x^2 - 2$.

Функция $f(x)$ имеет единственный корень на интервале $[a;b]$, если значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a)\cdot f(b) < 0$), и первая и вторая производные сохраняют свой знак на всем интервале;

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	**ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ**						
2	$x^2 - 2 = 0$						
3							
4			функция	первая производная	вторая производная		
5		*x*	*f(x)*	*f '(x)*	*f ''(x)*		
6	нижняя граница интервала	-2	2	-4	2		
7	середина интервала	0	-2	0	2		
8	верхняя граница интервала	2	2	4	2		
9							
10	контроль знаков функции и ее производных		0	0	0	разделить интервал	

ЛР2 ОтделениеКорней

Вид рабочего листа с формулами

F10 '=ЕСЛИ(СУММ(D10:E10)>0;"на интервале ["&B6&";"&B8&"] корень единственный";"разделить интервал")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ**									
2	$x^2 - 2 = 0$									
3										
4			функция	первая производная	вторая производная					
5		*x*	*f(x)*	*f '(x)*	*f ''(x)*					
6	нижняя граница интервала	-2	=B6^2-2	=2*B6	=2					
7	середина интервала	=(B6+B8)/2								
8	верхняя граница интервала	2								
9										
10	контроль знаков функции и ее производных		=ЕСЛИ(C6*C8<0;1;0)			=ЕСЛИ(СУММ(D10:E10)>0;"на интервале				
11				=ЕСЛИ($C$10=1;ЕСЛИ(D6*D7<0;0;ЕСЛИ(D7*D8<0;0;1));0)						
12					=ЕСЛИ($C$10=1;ЕСЛИ(E6*E7<0;0;ЕСЛИ(E7*E8<0;0;1));0)					

ЛР2 ОтделениеКорней

один из отрезков, на котором функция $f(x) = x^2 - 2$ меняет знак, $[1;2]$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ**								
2	$x^2 - 2 = 0$								
3									
4			функция	первая производная	вторая производная				
5		*x*	*f(x)*	*f '(x)*	*f ''(x)*				
6	нижняя граница интервала	1	-1	2	2				
7	середина интервала	1,5	0,25	3	2				
8	верхняя граница интервала	2	2	4	2				
9									
10	контроль знаков функции и ее производных		1	1	1	на интервале [1,2] корень единственный			

ЛР2 ОтделениеКорней

Метод дихотомии (деления отрезка пополам)

Алгоритм

Отделить корни уравнения $f(x) = 0$ – найти отрезок $[a_0;b_0]$, на котором $f(x)$ меняет знак: $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$.

Определить середину отрезка $x_0 = \dfrac{b_0 + a_0}{2}$.

Вычислить значение функции $f(x_0)$.

В зависимости от знака $f(x_0)$ определить новые границы отрезка $[a_i;b_i]$, $i = 1, 2\ldots$ следующим образом:

если $f(a_0)\cdot f(x_0) < 0$, то $a_i = a_{i-1}$, $b_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2 \ldots$;
если $f(a_0)\cdot f(x_0) > 0$, то $a_i = x_{i-1}$, $b_i = b_{i-1}$, $i = 1, 2 \ldots$.

Вычислить $x_i = \dfrac{b_i + a_i}{2}$.

Вычислить погрешность по формуле $r_i = b_i - a_i$.

Итерационный процесс заканчивается, как только $r_i < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Уточнение корня с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ДИХОТОМИИ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)								
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001			
3									
4		Границы отрезка		Середина отрезка	Значения функции				
5	номер итерации	a	b	$x = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Погрешность r_i	
6	0	1	2	1,5	-1	2	0,25	1	
7	1	1	1,5	1,25	-1	0,25	-0,4375	0,5	
8	2	1,25	1,5	1,375	-0,4375	0,25	-0,1094	0,25	
9	3	1,375	1,5	1,4375	-0,1094	0,25	0,06641	0,125	
10	4	1,375	1,4375	1,40625	-0,1094	0,06641	-0,0225	0,0625	
11	5	1,40625	1,4375	1,421875	-0,0225	0,06641	0,02173	0,03125	
12	6	1,40625	1,421875	1,4140625	-0,0225	0,02173	-0,0004	0,015625	
13	7	1,4140625	1,421875	1,41796875	-0,0004	0,02173	0,01064	0,0078125	
14	8	1,4140625	1,41796875	1,41601563	-0,0004	0,01064	0,0051	0,00390625	
15	9	1,4140625	1,416015625	1,41503906	-0,0004	0,0051	0,00234	0,001953125	
16	10	1,4140625	1,415039063	1,41455078	-0,0004	0,00234	0,00095	0,000976563	итерационный процесс закончен

ЛР2 МетодДихотомии

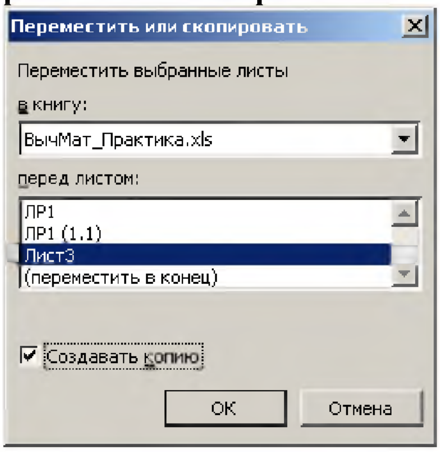
Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ДИХОТОМИИ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)								
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001			
3									
4		Границы отрезка		Середина отрезка	Значения функции				
5	номер итерации	a	b	$x = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Погрешность r_i	
6	0	1	2	=(B6+C6)/2	=B6^2-2	=C6^2-2	=D6^2-2	=C6-B6	=ЕСЛИ(H6>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")
7	=A6+1	=ЕСЛИ(E6*G6<0;B6;D6)	=ЕСЛИ(E6*G6<0;D6;C6)						

ЛР2 МетодДихотомии

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**:

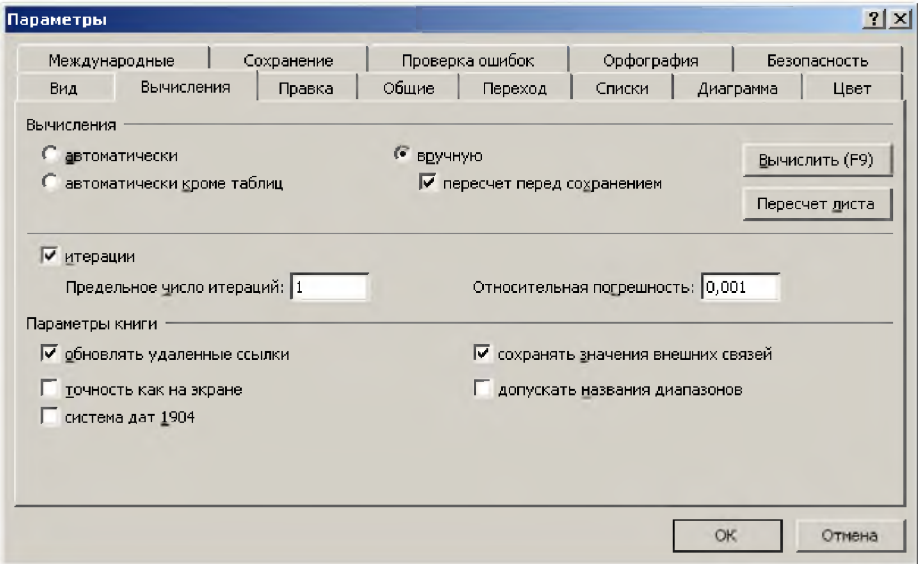


удалить строки с итерационным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ДИХОТОМИИ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
3								
4		Границы отрезка		Середина отрезка	Значения функции			
5	номер итерации	*a*	*b*	$x = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Погрешность r_i
6	0	1	2	1,5	-1	2	0,25	1
7	1	1	1,5					

ЛР2 МетодДихотомии (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001:



организовать в таблице циклическую ссылку: в ячейке, где хранилось старое значение корня, поставить ссылку на ячейку, где рассчитано новое, более точное значение корня:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ДИХОТОМИИ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
3								
4		Границы отрезка		Середина отрезка	Значения функции			
5	номер итерации	*a*	*b*	$x = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Погрешность r_i
6	=A7	=B7	=C7	1,5	-1	2	0,25	1
7	1	1	1,5					

ЛР2 МетодДихотомии (Итерации)

ечание: При итерировании листа ячейки с циклическими ссылками вычисляются слева направо и сверху вниз.

Для обновления вычислений в книге используется **F9**, для обновления листа **Shift + F9**.

нажимать клавишу **F9 (Обновить)**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ДИХОТОМИИ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)								
2	$x^2-2=0$			точность	$\varepsilon =$	0,001			
3									
4		Границы отрезка		Середина отрезка	Значения функции				
5	номер итерации	a	b	$x=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Погрешность r_i	
6	10	1,4140625	1,41503906	1,41455078	-0,0004	0,00234	0,00095	0,000976563	итерационный процесс закончен
7	11	1,4140625	1,41455078						

ЛР2 МетодДихотомии (Итерации)

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (автоматически):

в расчетных формулах задать начальное приближение;

настроить MS Excel на выполнение итераций автоматически: **Сервис – Параметры – Вычисления – автоматически**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 100, **Относительная погрешность** – 0,001;

нажать кнопку **Выполнить (F9)** для получения результата итерационного процесса (промежуточные итерации скрыты).

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод простых итераций

Алгоритм

Отделить корни уравнения $f(x)=0$ – найти отрезок $[a;b]$, на котором $f(x)$ меняет знак: $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$.

Найти максимум и минимум первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если $f'(x)>0$, найти ее максимум $M=\max\limits_{[a;b]}|f'(x)|$. Если $f'(x)<0$, следует взять функцию $f(x)$ с противоположным знаком.

Эквивалентное преобразование $f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$ выбирается в виде $x=x+\lambda\cdot f(x)$, где принимается $\lambda=-M$. Т. о., функция $g(x)$ имеет вид: $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{M}$.

Задать начальное приближение, например $x_0=\dfrac{b_0+a_0}{2}$.

Следующее приближение к корню рассчитывается по формуле $x_i=x_{i-1}+\dfrac{f(x_{i-1})}{M}$.

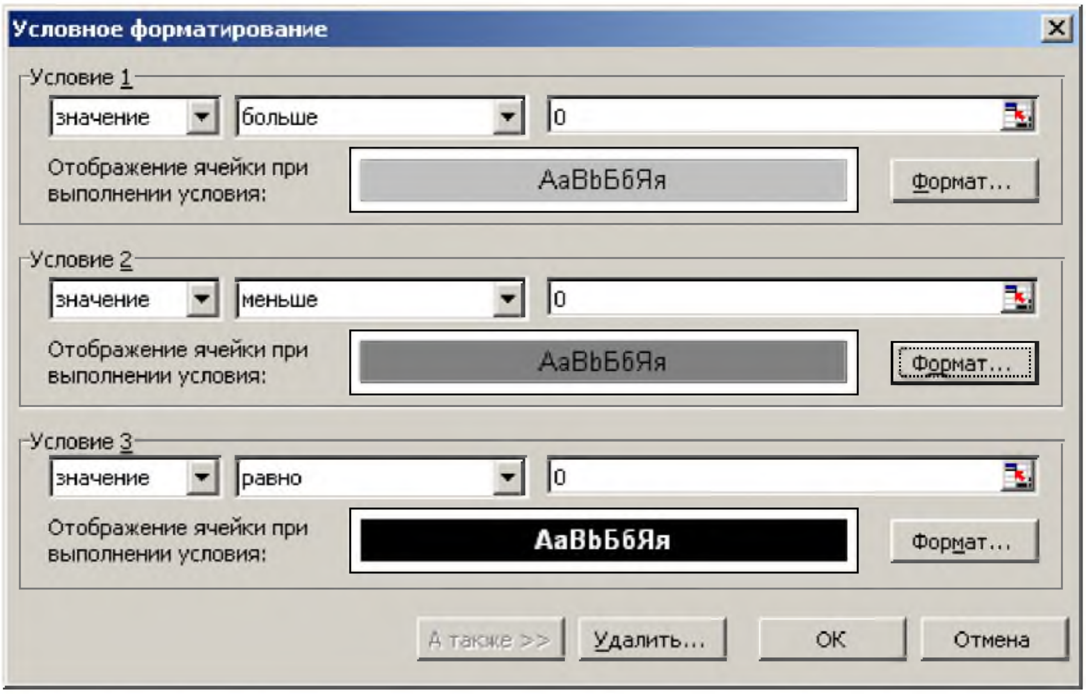
Погрешность найденного приближения оценивается по формуле $r_i=\dfrac{f(x_i)}{M}$ или $r_i=|x_i-x_{i-1}|$.

Итерационный процесс заканчивается, как только $r_i<\varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Отделение корней уравнения (см. **Отделение корней уравнения**).

Проверка знаков первой производной $f'(x)$ и второй производной $f''(x)$ с использованием условного форматирования **Формат – Условное форматирование…**:



Т. о., если производные не изменяют знак и не равны нулю, цвет ячеек не изменяется.

Максимум и минимум первой производной $f'(x)$:

	A	B	C	D	E	F	G
1	МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ						
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001	
3							
4	*x*	*f(x)*		*f '(x)*		*f ''(x)*	
5	1	-1	=A5^2-2	2	=2*A5	2	=2
6	1,1	-0,79		2,2		2	
7	1,2	-0,56		2,4		2	
8	1,3	-0,31		2,6		2	
9	1,4	-0,04		2,8		2	
10	1,5	0,25		3		2	
11	1,6	0,56		3,2		2	
12	1,7	0,89		3,4		2	
13	1,8	1,24		3,6		2	
14	1,9	1,61		3,8		2	
15	2	2		4		2	
16							
17	максимум первой производной			4	=МАКС(D5:D15)		
18	минимум первой производной			2	=МИН(D5:D15)		
19							
20	M =	4	=ЕСЛИ(D17>0;D17;ABS(D18))				

ЛР2 МетодПростыхИтераций

Уточнение корня методом простых итераций с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
22	номер итерации	*x*	*f(x)*	*g(x)*	Погрешность r_i			
23	0	1	-1	1,25	0,25			
24	1	1,25	-0,4375	1,359375	0,109375			
25	2	1,35938	-0,1521	1,397399902	0,038024902			
26	3	1,3974	-0,047274	1,409218281	0,011818378			
27	4	1,40922	-0,014104	1,41274424	0,003525959			
28	5	1,41274	-0,004154	1,413782668	0,001038428			
29	6	1,41378	-0,001219	1,41408731	0,000304642	итерационный процесс закончен		

ЛР2 МетодПростыхИтераций

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**										
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001					
22	номер итерации	*x*	*f(x)*	*g(x)*	Погрешность r_i						
23	0	1	=B23^2-2	=B23-C23/$B$20	=ABS(D23-B23)	=ЕСЛИ(E23>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")					
24	=A23+1	=D23									

ЛР2 МетодПростыхИтераций

Формулу для вычисления функции g(x) можно распространить и на случай $f'(x) < 0$, задав проверку на знак первой производной:

D23 = ЕСЛИ(ABS($D$18)>ABS($D$17);B23+C23/$B$20;B23-C23/$B$20)

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F
1	**МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**					
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001
19						
20	M =	4	=ЕСЛИ(D17>0;D17;ABS(D18))			
21						
22	номер итерации	*x0*	*f(x)*	*x1 = g(x)*	Погрешность r_i	
23	0	1	-1	1,25	0,25	
24	1					

ЛР2 МетодПростыхИтераций (Итера

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**									
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001				
19										
20	M =	4	=ЕСЛИ(D17>0;D17;ABS(D18))							
21										
22	номер итерации	="x"&A23	*f(x)*	="x"&A24&" = g(x)"	Погрешность r_i					
23	0	1	=B23^2-2	=B23-C23/$B$20	=ABS(D23-B23)	=ЕСЛИ(E23>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")				
24	=A23+1									

ЛР2 МетодПростыхИтераций (Итера

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклическую ссылку: в ячейке, где хранилось старое значение корня, поставить ссылку на ячейку, где рассчитано новое, более точное значение корня:

	A	B	C	D	E	F
1	МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ					
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001
19						
20	M =	4	=ЕСЛИ(D17>0;D17;ABS(D18))			
21						
22	номер итерации	x0	f(x)	x1 = g(x)	Погрешность r_i	
23	=A24	=D23	-1	1,25	0,25	
24	1					

ЛР2 МетодПростыхИтераций (Итера

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
19								
20	M =	4	=ЕСЛИ(D17>0;D17;ABS(D18))					
21								
22	номер итерации	x5	f(x)	x6 = g(x)	Погрешность r_i			
23	6	1,41378267	-0,001219	1,41408731	0,000304642	итерационный процесс закончен		
24	7							

ЛР2 МетодПростыхИтераций (Итера

ечание: Если задать другое начальное приближение, то значение корня может отличаться.

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод Ньютона

Алгоритм

Отделить корни уравнения $f(x)=0$ – найти отрезок $[a;b]$, на котором $f(x)$ меняет знак: $f(x_0)\cdot f(x_0)<0$.

Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

Выбрать $x_0 = a$, если $f(a)\cdot f''(a)>0$ или $x_0 = b$, если $f(b)\cdot f''(b)>0$.

Следующее приближение к корню рассчитывается по формуле $x_i = x_{i-1} + \dfrac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$.

Погрешность найденного приближения оценивается по формуле $r_i = \dfrac{f(x_i)}{\min\limits_{[a;b]}|f'(x)|}$ или $r_i = |x_i - x_{i-1}|$.

Итерационный процесс заканчивается, как только $r_i < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Отделение корней уравнения (см. **Отделение корней уравнения**).

Исследование первой производной $f'(x)$ и второй производной $f''(x)$ (см. **Метод простых итераций**).

Уточнение корня методом Ньютона с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД НЬЮТОНА								
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001			
3									
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f ''(a)*	начальное приближение			
5	1	2	-1	2	2	2			
6									
7	номер итерации	x_i	*f(x)*	*f '(x)*	x_{i+1}	Погрешность r_i			
8	0	2	2	4	1,5	0,5			
9	1	1,5	0,25	3	1,416666667	0,083333333			
10	2	1,41667	0,006944	2,83333	1,414215686	0,00245098			
11	3	1,41422	6,01E-06	2,82843	1,414213562	2,1239E-06	итерационный процесс закончен		

ЛР2 МетодНьютона

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	МЕТОД НЬЮТОНА										
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001					
3											
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f ''(a)*	начальное приближение					
5	1	2	=A5^2-2	=2*A5	=2	=ЕСЛИ(C5*E5>0;A5;B5)					
6											
7	номер итерации	x_i	*f(x)*	*f '(x)*	x_{i+1}	Погрешность r_i					
8	0	=F5	=B8^2-2	=2*B8	=B8-C8/D8	=ABS(E8-B8)	=ЕСЛИ(F8>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")				
9	=A8+1	=E8									

ЛР2 МетодНьютона

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F
1	МЕТОД НЬЮТОНА					
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001
3						
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f ''(a)*	начальное приближение
5	1	2	-1	2	2	2
6						
7	номер итерации	*x0*	*f(x)*	*f '(x)*	*x1*	Погрешность r_i
8	0	2	2	4	1,5	0,5
9	1	1,5				

ЛР2 МетодНьютона (Итерации)

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F
1	МЕТОД НЬЮТОНА					
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001
3						
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f "(a)*	начальное приближение
5	1	2	-1	2	2	2
6						
7	номер итерации	="x"&A8	*f(x)*	*f '(x)*	="x"&A9	Погрешность r_i
8	0	2	2	4	1,5	0,5
9	1	1,5				

ЛР2 МетодНьютона (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклическую ссылку: в ячейке, где хранилось старое значение корня, поставить ссылку на ячейку, где рассчитано новое, более точное значение корня:

	A	B	C	D	E	F
1	МЕТОД НЬЮТОНА					
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001
3						
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f "(a)*	начальное приближение
5	1	2	-1	2	2	2
6						
7	номер итерации	="x"&A8	*f(x)*	*f '(x)*	="x"&A9	Погрешность r_i
8	=A9	=B9	2	4	1,5	0,5
9	1	1,5				

ЛР2 МетодНьютона (Итерации)

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД НЬЮТОНА								
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001			
3									
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f "(a)*	начальное приближение			
5	1	2	-1	2	2	2			
6									
7	номер итерации	*x2*	*f(x)*	*f '(x)*	*x3*	Погрешность r_i			
8	3	1,41422	6,01E-06	2,82843	1,4142136	2,1239E-06	итерационный процесс закончен		
9	4	1,41421							

ЛР2 МетодНьютона (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод хорд

Алгоритм

Отделить корни уравнения $f(x)=0$ – найти отрезок $[a;b]$, на котором $f(x)$ меняет знак: $f(x_0)\cdot f(x_0)<0$.

Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

Выбрать $x_0=a$, если $f'(x)\cdot f''(x)>0$, $x\in[a;b]$ или $x_0=b$, если $f'(x)\cdot f''(x)<0$, $x\in[a;b]$.

Следующее приближение к корню рассчитывается по формуле:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(b) - f(x_{i-1})}(b - x_i), \text{ если } f'(x)\cdot f''(x)>0,\ x\in[a;b],\ i=1,2\ldots$$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - f(a)}(x_i - a), \text{ если } f'(x)\cdot f''(x)<0,\ x\in[a;b],\ i=1,2\ldots$$

Погрешность найденного приближения оценивается по формуле $r_i = \dfrac{|f(x_i)|}{\min\limits_{[a;b]}|f'(x)|}$ или $r_i = |x_i - x_{i-1}|$.

Итерационный процесс заканчивается, как только $r_i < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Отделение корней уравнения (см. **Отделение корней уравнения**).

Исследование первой производной $f'(x)$ и второй производной $f''(x)$ (см. **Метод простых итераций**).

Уточнение корня методом хорд с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ХОРД								
2	$x^2-2=0$			точность	$\varepsilon=$	0.001			
3									
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f ''(a)*	начальное приближение			
5	1	2	-1	2	2	1			
6									
7	номер итерации	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*x*	*f(x)*	Погрешность r_i	
8	0	1	2	-1	2	1.333333333	-0,2222	0.333333333	
9	1	1.33333	2	-0,22222	2	1.4	-0,04	0.066666667	
10	2	1,4	2	-0,04	2	1,411764706	-0,0069	0,011764706	
11	3	1,41176	2	-0,00692	2	1,413793103	-0,0012	0,002028398	
12	4	1,41379	2	-0,00119	2	1,414141414	-0,0002	0,000348311	итерационный процесс закончен

ЛР2 МетодХорд

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ХОРД								
2	$x^2-2=0$			точность	$\varepsilon=$	0,001			
3									
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f '(a)*	*f ''(a)*	начальное приближение			
5	1	2	=A5^2-2	=2*A5	2	=ЕСЛИ(D5*E5>0;A5;B5)			
6									
7	номер итерации	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*x*	*f(x)*	Погрешность r_i	
8	0	=F5	=ЕСЛИ(B8=A5,B5,A5)	=B8^2-2	=C8^2-2	=B8-D8*(C8-B8)/(E8-D8)	=F8^2-2	=ABS(F8-B8)	=ЕСЛИ(H8>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")
9	=A8+1	=ЕСЛИ(D8*G8<0;B8;F8)	=ЕСЛИ(E8*G8<0;C8;F8)						

ЛР2 МетодХорд

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ХОРД							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
3								
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение		
5	1	2	-1	2	2	1		
6								
7	номер итерации	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*x*	*f(x)*	Погрешность r_i
8	0	1	2	-1	2	1,333333333	-0,22222	0,333333333
9	1	1,333333	2					

ЛР2 МетодХорд (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклическую ссылку: в ячейке, где хранилось старое значение корня, поставить ссылку на ячейку, где рассчитано новое, более точное значение корня:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ХОРД							
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001		
3								
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение		
5	1	2	-1	2	2	1		
6								
7	номер итерации	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*x*	*f(x)*	Погрешность r_i
8	=A9	=B9	=C9	-1	2	1,333333333	-0,22222	0,333333333
9	1	1,333333	2					

ЛР2 МетодХорд (Итерации)

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	МЕТОД ХОРД											
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001						
3												
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение						
5	1	2	-1	2	2	1						
6												
7	номер итерации	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*x*	*f(x)*	Погрешность r_i				
8	4	1,413793	2	-0,00119	2	1,414141414	-0,0002	0,000348311	итерационный процесс закончен			
9	5	1,414141	2									

ЛР2 МетодХорд (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод секущих

Алгоритм

Отделить корни уравнения $f(x)=0$ – найти отрезок $[a;b]$, на котором $f(x)$ меняет знак: $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$.

Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

Выбрать $x_0 = a$, если $f(a) \cdot f''(a) > 0$, $x \in [a;b]$ или $x_0 = b$, если $f(b) \cdot f''(b) < 0$, $x \in [a;b]$.

Вычислить $x_1 = x_0 + \varepsilon$.

Следующее приближение к корню рассчитывается по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}(x_i - x_{i-1}).$$

Погрешность найденного приближения оценивается по формуле $r_i = \frac{f(x_i)}{\min\limits_{[a;b]}|f'(x)|}$ или

$r_i = |x_i - x_{i-1}|$.

Итерационный процесс заканчивается, как только $r_i < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Отделение корней уравнения (см. **Отделение корней уравнения**).

Исследование первой производной $f'(x)$ и второй производной $f''(x)$ (см. **Метод простых итераций**).

Уточнение корня методом секущих с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	МЕТОД СЕКУЩИХ									
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001				
3										
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение				
5	1	2	-1	2	2	1				
6										
7	номер итерации	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	Погрешность r_i			
8	0	1	1,001	-1	-0,997999	1,499750125	0,498750125			
9	1	1,001	1,49975	-0,998	0,249250437	1,400079856	0,099670269			
10	2	1,49975	1,40008	0,24925	-0,0397764	1,413796659	0,013716803			
11	3	1,40008	1,413797	-0,0398	-0,00117901	1,414215656	0,000418997	итерационный процесс закончен		

ЛР2 МетодСекущих

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	МЕТОД СЕКУЩИХ											
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001						
3												
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение						
5	1	2	-1	2	2	1						
6												
7	номер итерации	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	Погрешность r_i					
8	0	=F5	=B8+F2	=B8^2-2	=C8^2-2	=C8-E8*(C8-B8)/(E8-D8)	=ABS(F8-C8)	=ЕСЛИ(G8>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")				
9	=A8+1	=C8	=F8									

ЛР2 МетодСекущих

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G
1	МЕТОД СЕКУЩИХ						
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001	
3							
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение	
5	1	2	-1	2	2	1	
6							
7	номер итерации	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	Погрешность r_i
8	0	1	1,001	-1	-0,997999	1,499750125	0,498750125
9	1	1,001	1,49975				

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклическую ссылку: в ячейке, где хранилось старое значение корня, поставить ссылку на ячейку, где рассчитано новое, более точное значение корня:

	A	B	C	D	E	F	G
1	МЕТОД СЕКУЩИХ						
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001	
3							
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение	
5	1	2	-1	2	2	1	
6							
7	номер итерации	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	Погрешность r_i
8	=A9	=B9	=C9	-1	-0,997999	1,499750125	0,498750125
9	1	1,001	1,49975				

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	МЕТОД СЕКУЩИХ									
2	$x^2 - 2 = 0$			точность	$\varepsilon =$	0,001				
3										
4	*a*	*b*	*f(a)*	*f'(a)*	*f''(a)*	начальное приближение				
5	1	2	-1	2	2	1				
6										
7	номер итерации	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	Погрешность r_i			
8	3	1,40008	1,413797	-0,0398	-0,00117901	1,414215656	0,000418997	итерационный процесс закончен		
9	4	1,4138	1,414216							

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

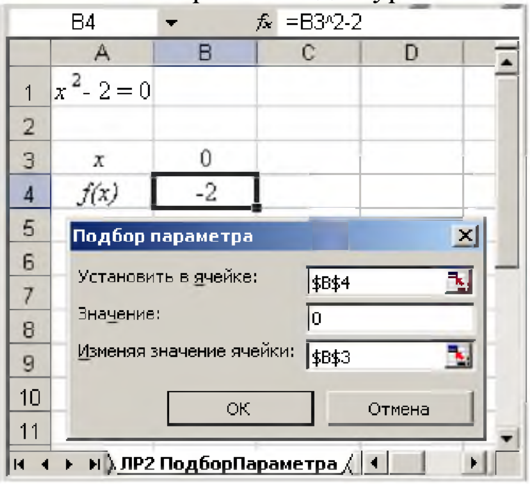
Использование встроенных инструментов MS EXCEL

Уточнение корня с использованием команды Подбор параметра MS Excel: **Сервис – Подбор параметра**:

точность итерационного процесса устанавливается **Сервис – Параметры – Вычисления**.

По умолчанию команда **Подбор параметра** прекращает вычисления, когда выполняется 100 итераций или при получении результата, который находится в пределах 0,001 от заданного целевого значения;

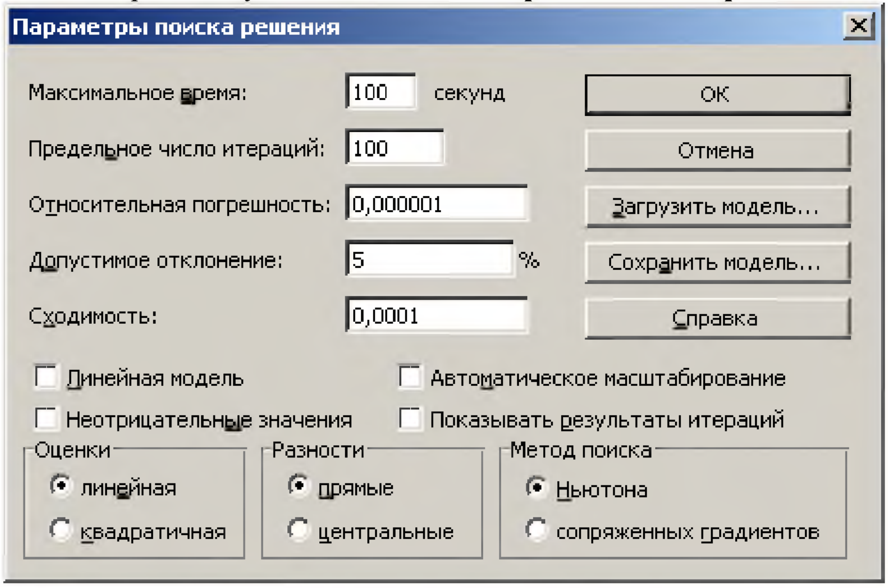
команда **Подбор параметра** позволяет найти решение для уравнения с одним неизвестным.



Уточнение корня с использованием надстройки Поиск решения MS Excel: **Сервис – Поиск решения**:

подключение надстройки Поиск решения MS Excel: **Сервис – Надстройки – Поиск решения**;

параметры итерационного процесса устанавливаются **Сервис – Поиск решения – Параметры**:



Максимальное время служит для ограничения времени, выделенного на поиск решения задачи. Значение, заданное в этом поле, не может превышать 32 767 с (примерно девять часов).

Предельное число итераций управляет временем решения задачи путем ограничения числа вычислительных циклов (итераций).

Относительная погрешность определяет, насколько точно должно совпадать вычисленное значение левой части ограничения со значением правой части, чтобы данное ограничение было выполнено.

Допустимое отклонение предназначено для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел.

Сходимость используется для завершения процесса поиска решения, когда изменение целевой функции происходит очень медленно (применяется только к нелинейным задачам).

Линейная модель служит для ускорения поиска решения путем применения к задаче оптимизации линейной модели (график зависимости целевой функции от каждого ограничения может быть представлен прямой линией). Нелинейные модели предполагают использование нелинейных функций, фактора роста и экспоненциального сглаживания, что замедляет вычисления.

Неотрицательные значения – позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых не было задано соответствующее ограничение в диалоговом окне **Добавить ограничение**.

Автоматическое масштабирование используется, когда числа в изменяемых ячейках и в целевой ячейке существенно различаются.

Показывать результаты итераций – приостанавливает поиск решения для просмотра результатов отдельных итераций. После каждой итерации открывается окно диалога **Текущее состояние поиска решений**, которое позволяет сохранить сценарий, прекратить поиск или продолжить его со следующей итерации. Следует иметь в виду, что промежуточные результаты могут не удовлетворять всем заданным ограничениям.

Загрузить модель – в одноименном диалоговом окне можно ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих модель оптимизации.

Сохранить модель – в одноименном диалоговом окне можно ввести ссылку на диапазон ячеек, предназначенный для хранения модели оптимизации.

Оценка линейная выбирается для работы с линейной моделью, для вычисления оценок используется линейная аппроксимация.

Оценка квадратичная выбирается для работы с нелинейной моделью, для вычисления оценок используется более точная квадратичная аппроксимация.

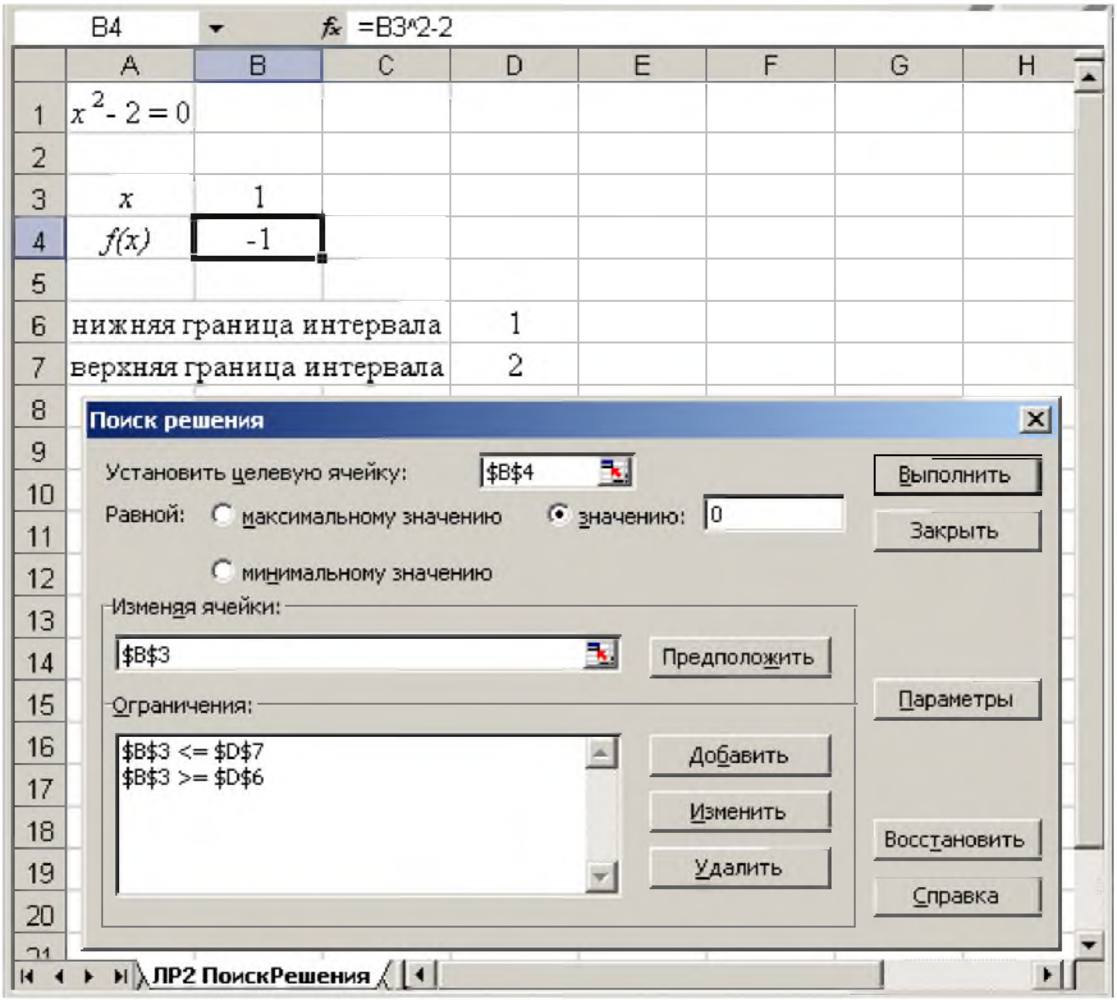
Разности прямые – используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Увеличивает скорость работы средства **Поиск решения**.

Разности центральные – используется для функций, имеющих разрывную производную (для вычисления частных производных применяется более точная аппроксимация, использующая большее количество точек). Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдано сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

Метод поиска Ньютона требует больше памяти, но выполняет меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов.

Метод поиска сопряженных градиентов реализует метод сопряженных градиентов, для которого требуется меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно большая и необходимо экономить память или если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Надстройка **Поиск решения** позволяет найти решение для уравнения с несколькими переменными.



Лабораторная работа

Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Цель

Ознакомиться с численными методами решения систем линейных уравнений и их реализацией в MS Excel.

Задача

Решить систему линейных уравнений с точностью ε одним из методов:

1) Якоби, $\varepsilon = 10^{-3}$;
2) Зейделя, $\varepsilon = 10^{-6}$;
3) минимальных невязок, $\varepsilon = 10^{-9}$.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
0	$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3{,}1x_4 = 0{,}35; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2{,}3x_4 = 1; \\ -10x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -7; \\ 0{,}5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2{,}3x_4 = -11. \end{cases}$	5	$\begin{cases} 18x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 7x_4 = 14; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 12x_4 = 15; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 19; \\ x_1 - 2x_2 - 15x_3 + 9x_4 = -13. \end{cases}$

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$\begin{cases}10x_1-5x_2+1x_3+5x_4=21;\\2x_1+30x_2-21x_3+5x_4=6;\\2x_1-8x_2+23x_3+12x_4=5;\\2x_1-8x_2-2x_3-14x_4=6.\end{cases}$	6	$\begin{cases}8x_1+5x_2-10x_3+8x_4=14;\\x_1+5x_2+3x_3-12x_4=15;\\3x_1-2x_2+5x_3+9x_4=-12;\\10x_1-2x_2-15x_3+29x_4=-13.\end{cases}$
2	$\begin{cases}34x_1-3x_2+x_3+4x_4=5;\\x_1-2x_2+5x_3+4x_4=6;\\2x_1-x_2+20x_3-x_4=-7;\\4x_1+5x_2-2x_3+2x_4=10.\end{cases}$	7	$\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3-3x_4=-36;\\x_1-4x_2+6x_3+24x_4=-27;\\3x_1+x_2+7x_3+9x_4=18;\\4x_1-x_2-2x_3+6x_4=27.\end{cases}$
3	$\begin{cases}5x_1-5x_2-5x_3-2x_4=8;\\2x_1-2x_2+5x_3+4x_4=-7;\\2x_1-7x_2+10x_3-x_4=7;\\4x_1+5x_2-2x_3+x_4=-1.\end{cases}$	8	$\begin{cases}-20x_1-4x_2+5x_3-31x_4=-35;\\5x_1+2x_2+3x_3-23x_4=1;\\x_1-10x_2+9x_3+x_4=7;\\x_1+3x_2-10x_3+3x_4=11.\end{cases}$
4	$\begin{cases}7x_1-13x_2-7x_3-2x_4=-20;\\3x_1+4x_2-x_3+x_4=-11;\\6x_1-2x_2+2x_3-x_4=10;\\2x_1+4x_2-2x_3+10x_4=4.\end{cases}$	9	$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3-x_4=7;\\x_1+5x_2+3x_3-x_4=9;\\x_1-2x_2+5x_3-2x_4=3;\\3x_1-x_2+2x_3+7x_4=14.\end{cases}$

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В MS EXCEL

Метод Якоби

Алгоритм

Выписать для системы $AX=B$ матрицу коэффициентов A и вектор правой части B.

Преобразовать исходную систему к виду $X=CX+F$, где элементы матрицы C определяются по формулам:

$$c_{ii}=0,$$

$$c_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i\neq j),$$

элементы столбца F:

$$f_i=-\frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Проверить условие сходимости: имеет ли матрица A диагональное преобладание или в преобразованной системе уравнений $X=CX+F$ имеет ли норма матрицы коэффициентов значение, меньшее единицы $\|C\|<1$ (в качестве нормы можно взять евклидову норму $\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}$).

Задать вектор нулевого приближения $X^{(0)}=F$.

Вычислить координаты вектора следующего, более точного приближения к решению по итерационной формуле:

$$X^{(k+1)} = CX^{(k)} + F$$

или

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}; \\ x_2^{k+1} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}}; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n^{k+1} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^k}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Окончание итерационного процесса:

оценить погрешность $r^{(k+1)} = \max\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$;

итерационный процесс заканчивается, как только $r^{(k+1)} < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}7; \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46; \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}8x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76; \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72. \end{cases}$$

Расположить на листе исходные данные:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ЯКОБИ							
2				точность	ε =	0,001		
3	AX = B							
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72

ЛРЗ МетодЯкоби

Рассчитать элементы матрицы C и столбца F:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ЯКОБИ							
2				точность	ε =	0,001		
3	AX = B							
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72
8								
9	X = CX + F							
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55
14								
15	норма	||C|| =	0,25914	<1, итерационный процесс сходится				

ЛРЗ МетодЯкоби

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	МЕТОД ЯКОБИ												
2				точность	ε =	0,001							
3	AX = B												
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7					
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46					
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76					
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72					
8													
9	X = CX + F												
10		=ЕСЛИ($B4:$E4/МАКС($B4:$E4)=1;0;-$B4:$E4/МАКС($B4:$E4))											
11	C =						F =						
12													
13								=H7/МАКС(B7:E7)					
14													
15	норма	‖C‖ =	0	<1, итерационный процесс сходится									
16			=КОРЕНЬ(СУММКВ(B10:E13))										
17				=ЕСЛИ(C15<1;"<1, итерационный процесс сходится";">1, итерационный процесс не сходится")									

ЛРЗ МетодЯкоби

Уточнение корней системы линейных уравнений методом Якоби с помощью таблицы вычислений (в качестве начального приближения выбрать значения столбца F):

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	МЕТОД ЯКОБИ									
2				точность	ε =	0,001				
3	AX = B									
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7		
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46		
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76		
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72		
8										
9	X = CX + F									
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04		
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30		
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45		
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55		
14										
15	норма	‖C‖ =	0,25914	<1, итерационный процесс сходится						
16										
17	номер итерации	0	1	2	3	4	5			
18		1,0383	0,7513	0,8103	0,7979	0,8004	0,7999			
19	матрица	1,2953	0,9511	1,0115	0,9977	1,0005	0,9999			
20	X	1,4525	1,1426	1,2115	1,1975	1,2005	1,1999			
21		1,5489	1,3601	1,4075	1,3983	1,4003	1,3999			
22	$r^{(k+1)}$		0,3442	0,0689	0,0140	0,0030	0,0006			
23							итерационный процесс закончен			

ЛРЗ МетодЯкоби

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	номер итерации	0	=B17+1					
18		=H10	{=МУМНОЖ($B$10:$E$13;B18:B21)+$H$10:$H$13}					
19	матрица							
20	X							
21								
22	$r^{(k+1)}$		{=МАКС(ABS(C18:C21-B18:B21))}					
23			=ЕСЛИ(C22>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")					

ЛРЗ МетодЯкоби

ечание: Фигурные скобки означают, что соответствующая формула выводится массивом, т. е. с использованием комбинации Ctrl + Shift + Enter.

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить ячейки с итерационным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ЯКОБИ							
2				точность	$\varepsilon =$	0,001		
3	AX = B							
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72
8								
9	X = CX + F							
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55
14								
15	норма	$\|C\| =$	0,25914	<1, итерационный процесс сходится				
16								
17	номер итерации	0	1					
18	матрица X	1,0383	0,7513					
19		1,2953	0,9511					
20		1,4525	1,1426					
21		1,5489	1,3601					
22	$r^{(k+1)}$		0,3442					

ЛР3 МетодЯкоби (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки: в ячейках, где хранились старые значения корней, поставить ссылку на ячейки, где рассчитаны новые, более точные значения корней:

	A	B	C
17	номер итерации	=C17	1
18	матрица X	=C18	0,7513
19			0,9511
20			1,1426
21			1,3601
22	$r^{(k+1)}$	=C22	0,3442

ЛР3 МетодЯкоби (Ите

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F
17	номер итерации	4	5			
18	матрица X	0,8004	0,7999			
19		0,9999	0,9999			
20		1,1999	1,1999			
21		1,3999	1,3999			
22	$r^{(k+1)}$	0,0026	0,0005			
23			итерационный процесс закончен			

ЛРЗ МетодЯкоби (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод Зейделя

Алгоритм

Выписать для системы $AX = B$ матрицу коэффициентов A и вектор правой части B.

Преобразовать исходную систему к виду $X = CX + F$, где элементы матрицы C определяются по формулам:

$$c_{ii} = 0,$$

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j),$$

элементы столбца F:

$$f_i = -\frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Проверить условие сходимости: имеет ли матрица A диагональное преобладание или в преобразованной системе уравнений $X = CX + F$ имеет ли норма матрицы коэффициентов значение, меньшее единицы $\|C\| < 1$ (в качестве нормы можно взять евклидову норму $\|\tilde{O}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$).

Задать вектор нулевого приближения $X^{(0)} = F$.

Вычислить координаты вектора следующего, более точного приближения к решению по итерационным формулам:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}; \\ x_2^{k+1} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}}; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n^{k+1} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Окончание итерационного процесса:

оценить погрешность $r^{(k+1)} = \max\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$;

итерационный процесс заканчивается, как только $r^{(k+1)} < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Расположить на листе исходные данные и уточнить корни системы линейных уравнений методом Зейделя с помощью таблицы вычислений (в качестве начального приближения выбрать значения столбца F):

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ								
2				точность	ε =	0,001			
3	AX = B								
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7	
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46	
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76	
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72	
8									
9	X = CX + F								
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04	
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30	
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45	
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55	
14									
15	норма	‖C‖ =	0,25914	<1, итерационный процесс сходится					
16									
17	номер итерации	0	1	2	3	4			
18		1,03828	0,75126	0,80192	0,80007	0,80000			
19	матрица	1,29528	0,96733	0,99957	1,00003	1,00000			
20	X	1,45253	1,19787	1,19957	1,19999	1,20000			
21		1,54891	1,40400	1,40000	1,40000	1,40000			
22	$r^{(k+1)}$		0,32795	0,05066	0,00185	0,00007			
23						итерационный процесс закончен			

ЛР3 МетодЗейделя

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	номер итерации	0	=B17+1					
18		=H10	=МУМНОЖ($C$10:$E$10;B19:B21)+$H$10					
19	матрица		=$B$11*C18+МУМНОЖ($D$11:$E$11;B20:B21)+$H$11					
20	X		=МУМНОЖ($B$12:$C$12;C18:C19)+$E$12*B21+$H$12					
21			=МУМНОЖ($B$13:$D$13;C18:C20)+$H$13					
22	$r^{(k+1)}$		{=МАКС(ABS(C18:C21-B18:B21))}					
23			=ЕСЛИ(C22>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")					

ЛР3 МетодЗейделя

Уточнение корня с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить ячейки с итерационным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ							
2				точность	$\varepsilon =$	0,001		
3	AX = B							
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72
8								
9	X = CX + F							
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55
14								
15	норма	‖C‖ =	0,25914	<1, итерационный процесс сходится				
16								
17	номер итерации	0	1					
18	матрица X	1,03828	0,75126					
19		1,29528	0,96733					
20		1,45253	1,19787					
21		1,54891	1,40400					
22	$r^{(k+1)}$		0,32795					

ЛР3 МетодЗейделя (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки: в ячейках, где хранились старые значения корней, поставить ссылку на ячейки, где рассчитаны новые, более точные значения корней:

	A	B	C
17	номер итерации	=C17	1
18	матрица X	=C18	0,75126
19			0,96733
20			1,19787
21			1,40400
22	$r^{(k+1)}$	=C22	0,32795

ЛР3 МетодЗейделя (Ите

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за поведением погрешности:

	A	B	C	D	E	F
17	номер итерации	5	6			
18	матрица X	0,80007	0,80000			
19		1,00003	1,00000			
20		1,19999	1,20000			
21		1,40000	1,40000			
22	$r^{(k+1)}$	0,00000	0,00007			
23			итерационный процесс закончен			

ЛР3 МетодЗейделя (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Поскольку подсчет номера итерации и расчет погрешности работают некорректно, следует модифицировать формулы:

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	номер итерации	0	=ЕСЛИ(ИЛИ(B17=0;C18=B18);B17+1;B17)					
18	матрица X	1,03828	0,75126					
19		1,29528	0,96733					
20		1,45253	1,19787					
21		1,54891	1,40400					
22	$r^{(k+1)}$		{=ЕСЛИ(C18=B18;"";МАКС(ABS(C18:C21-B18:B21)))}					

ЛР3 МетодЗейделя (Итерации)

и снова провести расчет:

	A	B	C	D	E	F
17	номер итерации	3	4			
18	матрица X	0,80007	0,80000			
19		1,00003	1,00000			
20		1,19999	1,20000			
21		1,40000	1,40000			
22	$r^{(k+1)}$		0,00007			
23			итерационный процесс закончен			

ЛР3 МетодЗейделя (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Метод минимальных невязок (Ричардсона)

Алгоритм

Выписать для системы $AX = B$ матрицу коэффициентов A и вектор правой части B.

Преобразовать исходную систему к виду $X = CX + F$, где элементы матрицы C определяются по формулам:

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j)$$

элементы столбца F: $\quad f_i = -\frac{b_i}{a_{ii}}$.

Проверить условие сходимости: имеет ли матрица A диагональное преобладание или в преобразованной системе уравнений $X = CX + F$ имеет ли норма матрицы коэффициентов значение, меньшее единицы $\|C\| < 1$ (в качестве нормы можно взять евклидову норму $\|\tilde{O}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$).

Задать вектор нулевого приближения $X^{(0)} = F$.

Вычислить вектор невязки $\delta^0 = AX^0 - B$.

Вычислить $\tau_0 = \dfrac{\delta^0 \cdot (A\delta^0)}{(A\delta^0)^2}$.

Вычислить координаты вектора следующего, более точного приближения к решению по итерационной формуле $X^1 = X^0 - \tau_0 \delta^0$.

Вычислить вектор невязки $\delta^1 = AX^1 - B$, затем процедура вычисления повторяется.

Оценить погрешность $\mathrm{R}^1 = \dfrac{\|\delta\|}{\|B\|}$ (в качестве нормы можно взять евклидову норму $\|\tilde{O}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$).

Итерационный процесс заканчивается, как только $R^i < \varepsilon$.

Реализация в MS Excel

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК								
2				точность	ε =	0,001			
3	AX = B								
4		20,9	1,2	2,1	0,9			21,7	
5	A =	1,2	21,2	1,5	2,5		B =	27,46	
6		2,1	1,5	19,8	1,3			28,76	
7		0,9	2,5	1,3	32,1			49,72	
8									
9	X = CX + F								
10		0,00	-0,06	-0,10	-0,04			1,04	
11	C =	-0,06	0,00	-0,07	-0,12		F =	1,30	
12		-0,11	-0,08	0,00	-0,07			1,45	
13		-0,03	-0,08	-0,04	0,00			1,55	
14									
15	норма	‖C‖ =	0,25914	<1, итерационный процесс сходится					
16									
17	номер итерации	0	1	2	3	4			
18	матрица X	1,0383	0,8308	0,8040	0,7998	0,7998			
19		1,2953	1,0428	1,0113	1,0019	1,0005			
20		1,4525	1,2402	1,2089	1,2017	1,2004			
21		1,5489	1,3392	1,4044	1,3979	1,4002			
22	вектор невязки δ	5,99866	0,72406	0,11963	1,3E-05	-0,0023			
23		7,297	0,85375	0,26848	0,03766	0,01113			
24		6,13689	0,84632	0,20794	0,03294	0,00899			
25		6,06094	-1,7634	0,18581	-0,059	0,00758			
26	τ	0,03459	0,03697	0,03491	0,03789	0,03645			
27	$R^{(k)}$	0,19018	0,03351	0,00602	0,00115	0,00024			
28						итерационный процесс закончен			

ЛРЗ МетодМинимальныхНевязок

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
17	номер итерации	0	=B17+1									
18	матрица X	=H10	{=B18:B21-B26*B22:B25}									
19												
20												
21												
22	вектор невязки δ	{=МУМНОЖ($B$4:$E$7;B18:B21)-$H$4:$H$7}										
23												
24												
25												
26	τ	=СУММПРОИЗВ(B22:B25;МУМНОЖ($B$4:$E$7;B22:B25))/СУММКВ(МУМНОЖ($B$4:$E$7;B22:B25))										
27	$R^{(k)}$	=КОРЕНЬ(СУММКВ(B22:B25))/КОРЕНЬ(СУММКВ($H$4:$H$7))										
28		=ЕСЛИ(B27>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")										

ЛР3 МетодМинимальныхНевязок

Использование встроенных инструментов MS EXCEL

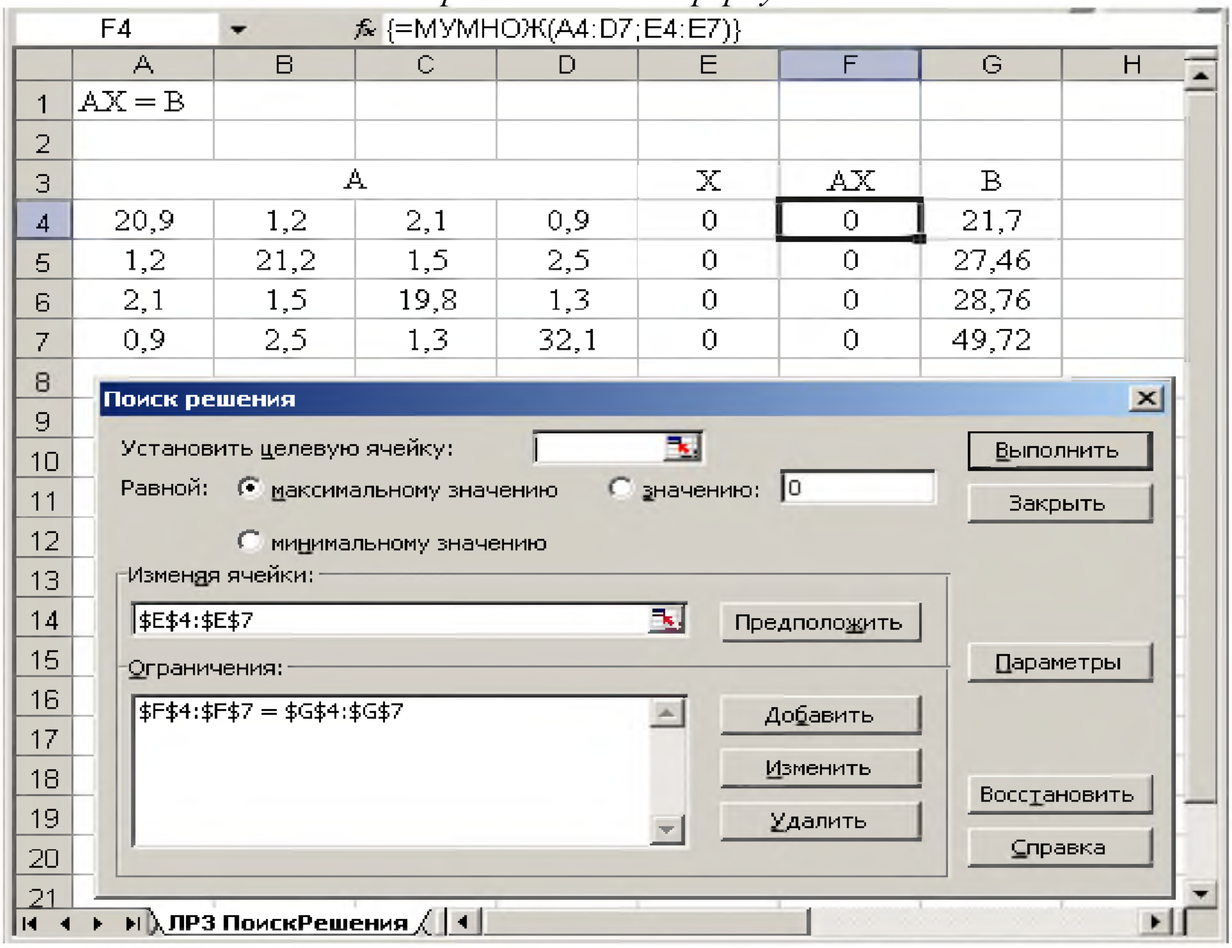
Уточнение корня с использованием надстройки Поиск решения MS Excel: **Сервис – Поиск решения**:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	AX = B						
2							
3		A			X	AX	B
4	20,9	1,2	2,1	0,9	0,8	21,7	21,7
5	1,2	21,2	1,5	2,5	1	27,46	27,46
6	2,1	1,5	19,8	1,3	1,2	28,76	28,76
7	0,9	2,5	1,3	32,1	1,4	49,72	49,72

ЛР3 ПоискРешения

Вид рабочего листа с формулами



Решение системы линейных уравнений с использованием обратных матриц:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	AX = B											
2									Проверка			
3		20,9	1,2	2,1	0,9		21,7		21,7	{=МУМНОЖ(B3:E6;B13:B16)}		
4	A =	1,2	21,2	1,5	2,5	B =	27,46		27,46			
5		2,1	1,5	19,8	1,3		28,76		28,76			
6		0,9	2,5	1,3	32,1		49,72		49,72			
7												
8		0,04851	-0,0023	-0,0049	-0,001	{=МОБР(B3:E6)}						
9	A^{-1} =	-0,0023	0,04794	-0,0032	-0,0035							
10		-0,0049	-0,0032	0,05138	-0,0017							
11		-0,001	-0,0035	-0,0017	0,03152							
12												
13		0,8	{=МУМНОЖ(B8:E11;G3:G6)}									
14	X =	1										
15		1,2										
16		1,4										

ЛР3 МетодОбратныхМатриц

Лабораторная работа 5 «Приближение функций»

Цель

Ознакомиться с численными методами получения аналитической зависимости по экспериментальным точкам и их реализацией в MS Excel.

ЗАДАЧА

Известны значения функции $y_i = f(x_i)$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ в $n+1$ точке x_i $(i = 0; 1; \ldots; n)$.

Восстановить функцию на отрезке $[x_0; x_n]$, пользуясь:

1) интерполяционной формулой Лагранжа;
2) интерполяционной формулой Ньютона;
3) кубическими сплайнами;
4) методом минимальных квадратов.

Вариант	Аналитический вид функции для проверки	Значения сеточной функции на отрезке интерполяции	
		x_i	y_i
0	$f(x) = \ln(x+2)$	1	1,09
		2	1,39
		3	1,60
		4	1,79
1	$f(x) = 0{,}6e^{0{,}3x}$	1	0,80
		2	1,09
		3	1,47
		4	1,99
2	$f(x) = x\ln x$	1	0
		2	1,38
		3	3,29
		4	5,54
3	$f(x) = 0{,}8^{0{,}5x+0{,}5}$	1	2,17
		2	3,58
		3	5,91
		4	9,74
4	$f(x) = 0{,}4\ln(2x)$	1	0,27
		2	0,55
		3	0,71
		4	0,83
5	$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$	1	2,71
		2	3,69
		3	6,69
		4	13,64
6	$f(x) = 0{,}6\ln x + 0{,}1e^x$	1	0,27
		2	1,15
		3	2,67
		4	6,29
7	$f(x) = 0{,}3 + e^{0{,}9x-2}$	1	0,63
		2	1,11
		3	2,31
		4	5,25
8	$f(x) = e^{0{,}3x} - \ln(0{,}7x)$	1	1,71
		2	1,49
		3	1,72
		4	2,29
9	$f(x) = 0{,}4\ln(x^2)$	1	0
		2	5,54
		3	8,78
		4	11,09

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В MS EXCEL

Интерполяционная формула Лагранжа

Алгоритм

Рассчитать коэффициенты формулы Лагранжа c_k $(k = 0; 1; \ldots; n)$ по формулам:

$$c_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}.$$

Теперь в любой точке отрезка $[x_0; x_n]$ можно высчитать приближенное значение функции $f(x)$ по формуле:

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) \cdot f(x_k).$$

Погрешность можно оценить по формуле:

$$R_{L_n}(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} \cdot M,$$

где $M = \max | f^{(n+1)}(x)|$, $x \in [x_0; x_n]$.

Определить коэффициенты интерполяционного многочлена для заданных точек отрезка $[x_0; x_n]$ путем решения системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_k^{i-1} = y_k.$$

Реализация в MS Excel

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x) = \lg x - \frac{x-1}{x}$, заданной таблично:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	3	6	8	9
y_i	0	–0,1895	–0,0552	0,0281	0,1323

Построить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение функции в точке $x = 2{,}005$.

Расчет значения функции в заданной точке:

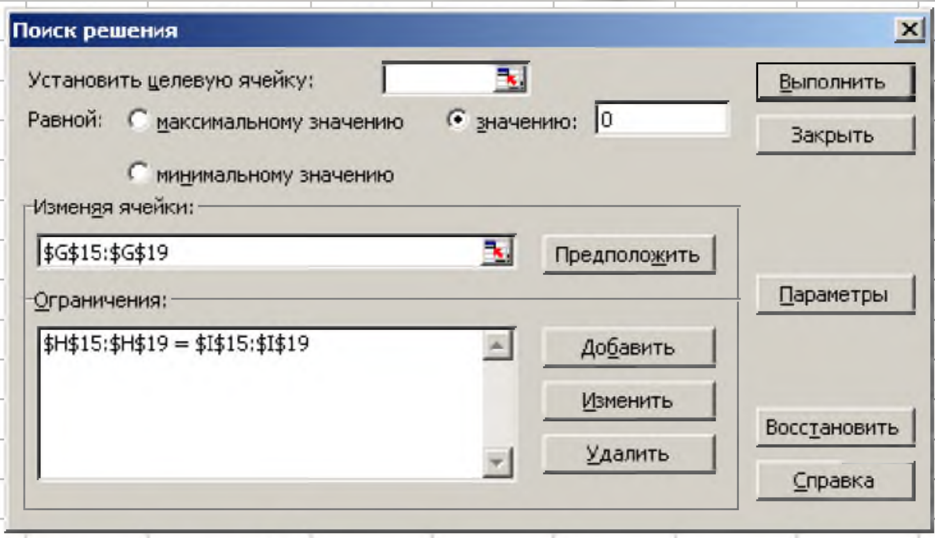
ние: При реализации алгоритма учитывать обозначение $f(x_i) = y_i$.

	A	B	C	D	E
1	ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА				
2					
3	i	x_i	y_i	$c_k(x)$	
4	0	1	0	0,29767	{=ПРОИЗВЕД(ЕСЛИ(B4-$B$4:$B$8=0;1;($B$11-$B$4:$B$8)/(B4-$B$4:$B$8)))}
5	1	3	-0,1895	0,93538	
6	2	6	-0,0552	-0,4659	
7	3	8	0,0281	0,3992	
8	4	9	0,1323	-0,1663	
9					
10		x	$f(x)$		
11		2,005	-0,1623205		
12			=СУММПРОИЗВ(C4:C8;D4:D8)		

ЛР4 ФормулаЛагранжа

Определение для заданных исходных данных коэффициентов интерполяционного многочлена:

Вид рабочего листа с данными для расчета



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	i	x_i^4	x_i^3	x_i^2	x_i^1	x_i^0	a_i	ХА	y_i
15	0	1	1	1	1	1	0	0	0
16	1	81	27	9	3	1	0	0	-0,1895
17	2	1296	216	36	6	1	0	0	-0,0552
18	3	4096	512	64	8	1	0	0	0,0281
19	4	6561	729	81	9	1	0	0	0,1323

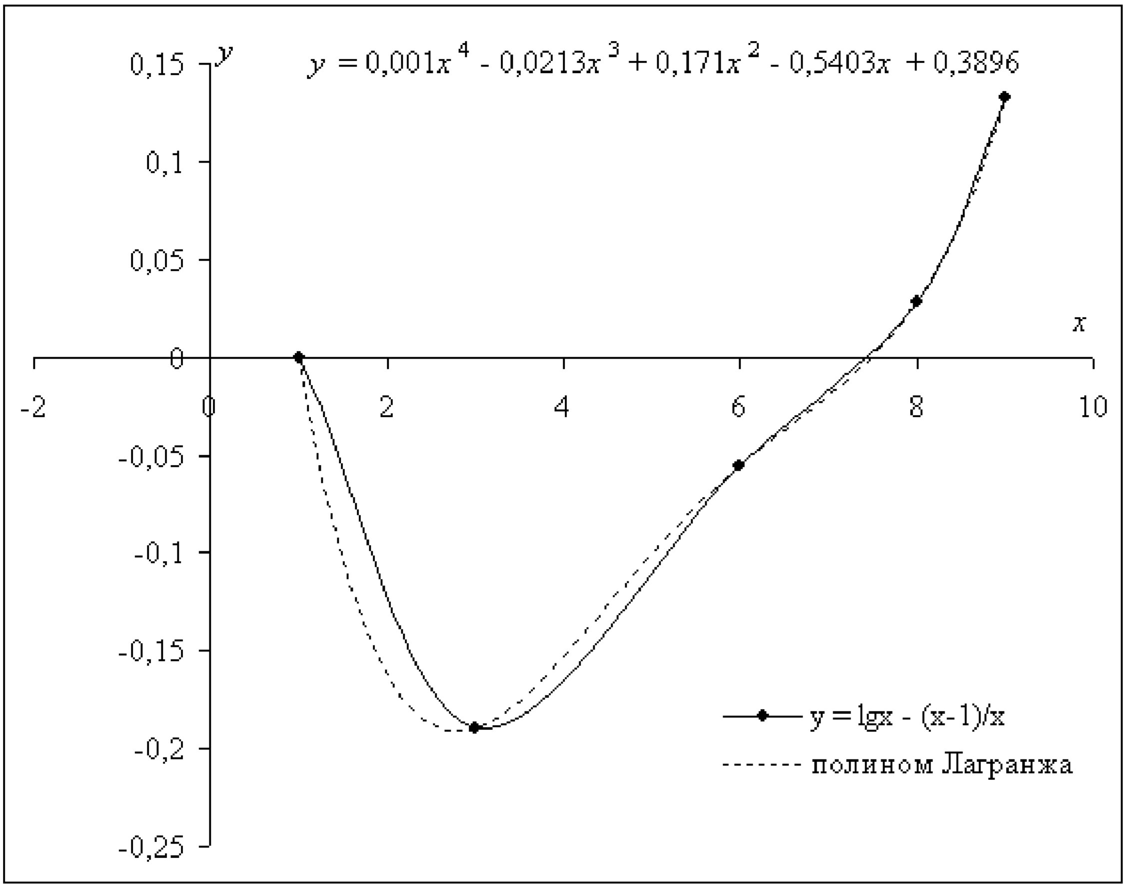
Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	i	x_i^4	x_i^3	x_i^2	x_i^1	x_i^0	a_i	ХА	y_i
15	=A4	=E15^4	=E15^3	=E15^2	=B4	=E15^0	0	{=МУМНОЖ(B15:F19;G15:G19)}	=C4

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	i	x_i^4	x_i^3	x_i^2	x_i^1	x_i^0	a_i	ХА	y_i					
15	0	1	1	1	1	1	0,0010	2,2E-16	0					
16	1	81	27	9	3	1	-0,0213	-0,1895	-0,1895					
17	2	1296	216	36	6	1	0,1710	-0,0552	-0,0552					
18	3	4096	512	64	8	1	-0,5403	0,0281	0,0281					
19	4	6561	729	81	9	1	0,3896	0,1323	0,1323					
20														
21	$f(x)=$	0,0010	x_i^4	+	-0,0213	x_i^3	+	0,1710	x_i^2	+	-0,5403	x_i	+	0,3896
22		=G15			=G16			=G17			=G18			=G19

График функции $f(x) = \lg x - \dfrac{x-1}{x}$



Интерполяционная формула Ньютона

Алгоритм

Вычислить значения разделенных разностей первого порядка

$$f(x_i;x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j},$$

второго порядка

$$f(x_i;x_j;x_k)=\frac{f(x_i;x_j)-f(x_i;x_k)}{x_i-x_k},$$

порядка *n*

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_n)=\frac{f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1})-f(x_1;\ldots;x_n)}{x_0-x_n}.$$

Теперь в любой точке отрезка $[x_0;x_n]$ можно высчитать приближенное значение функции $f(x)$ по формуле:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x_2)+\ldots+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots\cdot(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;\ldots;x_n)$$

Погрешность можно оценить по формуле:

$$R_{P_n}(x)=f(x)-P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\cdot(x-x_n)f(x_0;x_1;\ldots;x_{n+1}).$$

Реализация в MS Excel

Расположить на листе исходные данные и провести вычисления:

ние: При реализации алгоритма учитывать обозначение $f(x_i)=y_i$ и обозначение на рабочем листе разделенных разностей i -го порядка через $\Delta^i y$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА										
2											
3	i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Pi(x-x_i)$			
4	0	1	0	-0,0948	0,0279	-0,0041	0,00096	1			
5	1	3	-0,1895	0,04477	-0,0006	0,00358		1,00500	{=ПРОИЗВЕД($B$11-$B$4:B4)}		
6	2	6	-0,0552	0,04165	0,02085			-0,99998			
7	3	8	0,0281	0,1042				3,99490			
8	4	9	0,1323					-23,94943			
9											
10		x	$f(x)$								
11		2,005	-0,1623205								
12			=МУМНОЖ(C4:G4;H4:H8)								

ЛР4 ФормулаНьютона

ния:

1. В отличие от формулы Лагранжа, где каждый член зависит от всех узлов интерполяции, любой k-й член формулы Ньютона зависит от первых (от начала отсчета) узлов, и добавление новых узлов вызывает лишь добавление новых членов формулы (в этом преимущество формулы Ньютона).
2. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, построенные по одной сеточной функции, совпадают.
3. Если узлы интерполяции расположены неравномерно, в качестве интерполирующего многочлена лучше использовать полином Лагранжа, а если равномерно, то полином Ньютона, так как он дает меньшую вычислительную погрешность.

Метод наименьших квадратов

Алгоритм

Выбирается число m – степень обобщенного многочлена $g_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ (причем $m < n$, n – количество заданных узлов функции), который будет аппроксимировать функцию $f(x)$.

Составляется система линейных уравнений для поиска числовых коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=0}^{n} x_i^2 a_1 + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i; \\ \vdots \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m. \end{cases}$$

Система решается одним из известных методов (допустим, Гаусса), определяются коэффициенты $a_0; a_1; \ldots; a_m$.

Многочлен с полученными коэффициентами $a_0; a_1; \ldots; a_m$ обладает минимальным квадратичным отклонением.

Если $m = n$, то аппроксимирующий многочлен $g_m(x)$ совпадает с многочленом Лагранжа для системы точек $x_0; x_1; \ldots; x_n$.

Теперь в любой точке отрезка $[x_0; x_n]$ можно высчитать приближенное значение функции $f(x)$ по формуле:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

Реализация в MS Excel

Аппроксимировать квадратичным полиномом функцию $f(x)$, заданную таблично, и вычислить значение в точке $x = 2{,}005$:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ							
2								
3	i	x_i	x_i^2	y_i				
4	0	1	1	0				
5	1	3	9	-0,1895				
6	2	6	36	-0,0552				
7	3	8	64	0,0281				
8	4	9	81	0,1323				
9								
10		x	$f(x)$					
11		2,005	-0,0911449					
12								
13				a_i	XA	$y_i x_i^m$		
14	5	27	191	0,06389	-0,0843	-0,0843		
15	27	191	1485	-0,1020	0,5158	0,5158		
16	191	1485	12035	0,0123	8,822	8,822		
17								
18	$f(x) =$	0,0123	x_i^2	+	-0,1020	x_i	+	0,0639

ЛР4 МНК

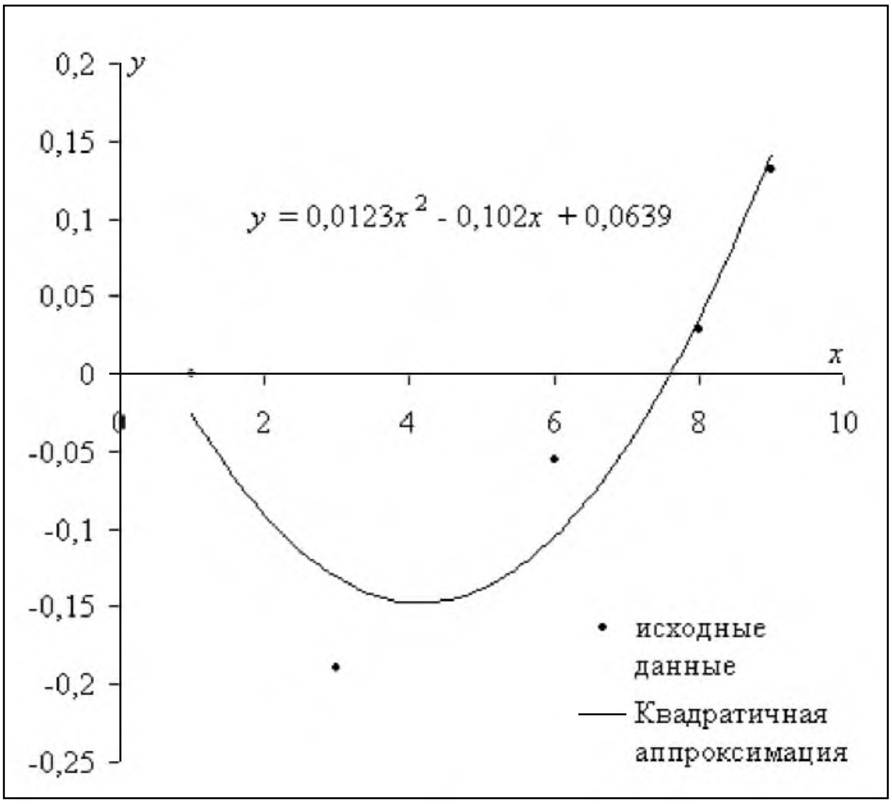
ние: Для определения столбца неизвестных a_i использовать надстройку Поиск решения: **Сервис – Поиск решения**.

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ							
2								
3	i	x_i	y_i					
4	0	1	0					
5	1	3	-0,1895					
6	2	6	-0,0552					
7	3	8	0,0281					
8	4	9	0,1323					
9								
10		x	$f(x)$					
11		2,005	{=СУММПРОИЗВ(D14:D16,$B$11^A4:A6)}					
12								
13				a_i	XA	$y_i x_i^m$		
14	{=СУММ($B$4:$B$8^A4)}	{=СУММ($B$4:$B$8^A5)}	{=СУММ($B$4:$B$8^A6)}		{=МУМНОЖ(A14:C16;D14:D16)}	=СУММПРОИЗВ($C$4:$C$8;$B$4:$B$8^A4)		
15								
16								
17								
18	$f(x) =$	=D16	x_i^2	+	=D15	x_i	+	=D14

ЛР4 МНК

График квадратичной аппроксимации:



Использование встроенных инструментов MS EXCEL

Аппроксимация с использованием функции ЛИНЕЙН:

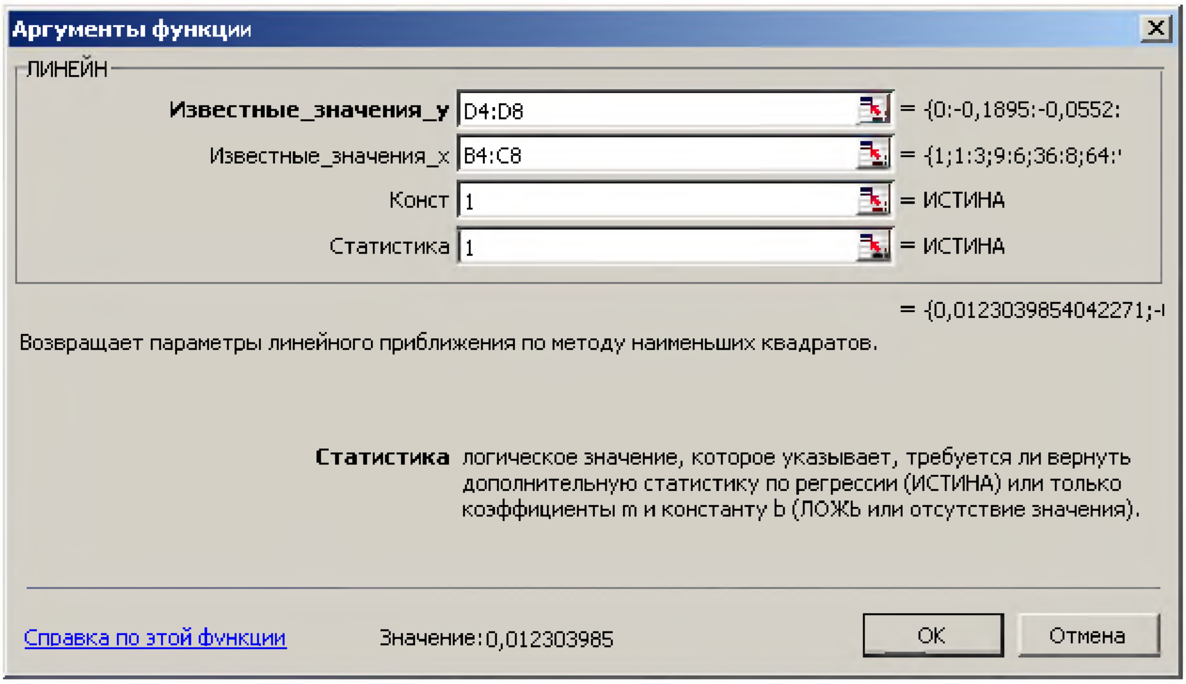
подготовить данные для квадратичной аппроксимации (столбцы значений переменных x_i, x_i^2, y_i):

	A	B	C	D	E
1	МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ				
2					
3	i	x_i	x_i^2	y_i	
4	0	1	1	0	
5	1	3	9	-0,1895	
6	2	6	36	-0,0552	
7	3	8	64	0,0281	
8	4	9	81	0,1323	

ЛР4 МНК

выделить для вывода массива значений диапазон 5 строк и 3 столбца (сколько переменных, столько выделяется столбцов);

вставить функцию ЛИНЕЙН:



Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E
1	МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ				
2					
3	i	x_i	x_i^2	y_i	
4	0	1	1	0	
5	1	3	9	-0,1895	
6	2	6	36	-0,0552	
7	3	8	64	0,0281	
8	4	9	81	0,1323	
19					
20	{=ЛИНЕЙН(D4:D8;B4:C8;1;1)}				
21					
22					
23					
24					

ЛР4 МНК

завершить вывод массива Ctrl + Shift +Enter:

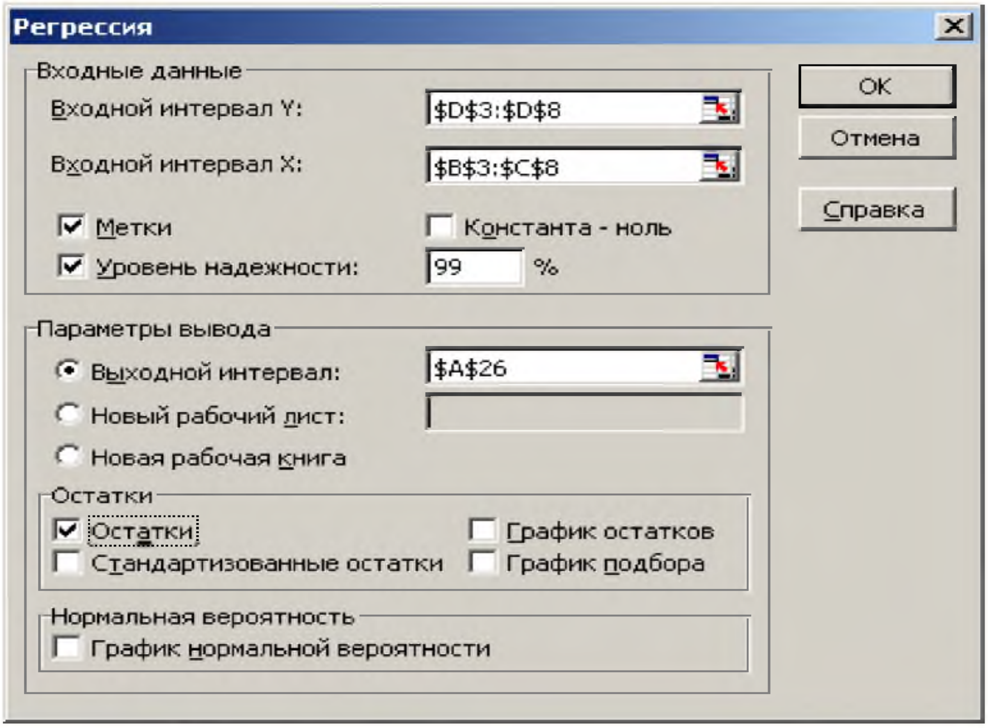
Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E
1	МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ				
2					
3	i	x_i	x_i^2	y_i	
4	0	1	1	0	
5	1	3	9	-0.1895	
6	2	6	36	-0,0552	
7	3	8	64	0,0281	
8	4	9	81	0,1323	
19					
20	0,0123	-0,102	0,06389		
21	0,00423	0,04336	0,08612		
22	0,88003	0,05787	#Н/Д		
23	7,33515	2	#Н/Д		
24	0,04913	0,0067	#Н/Д		

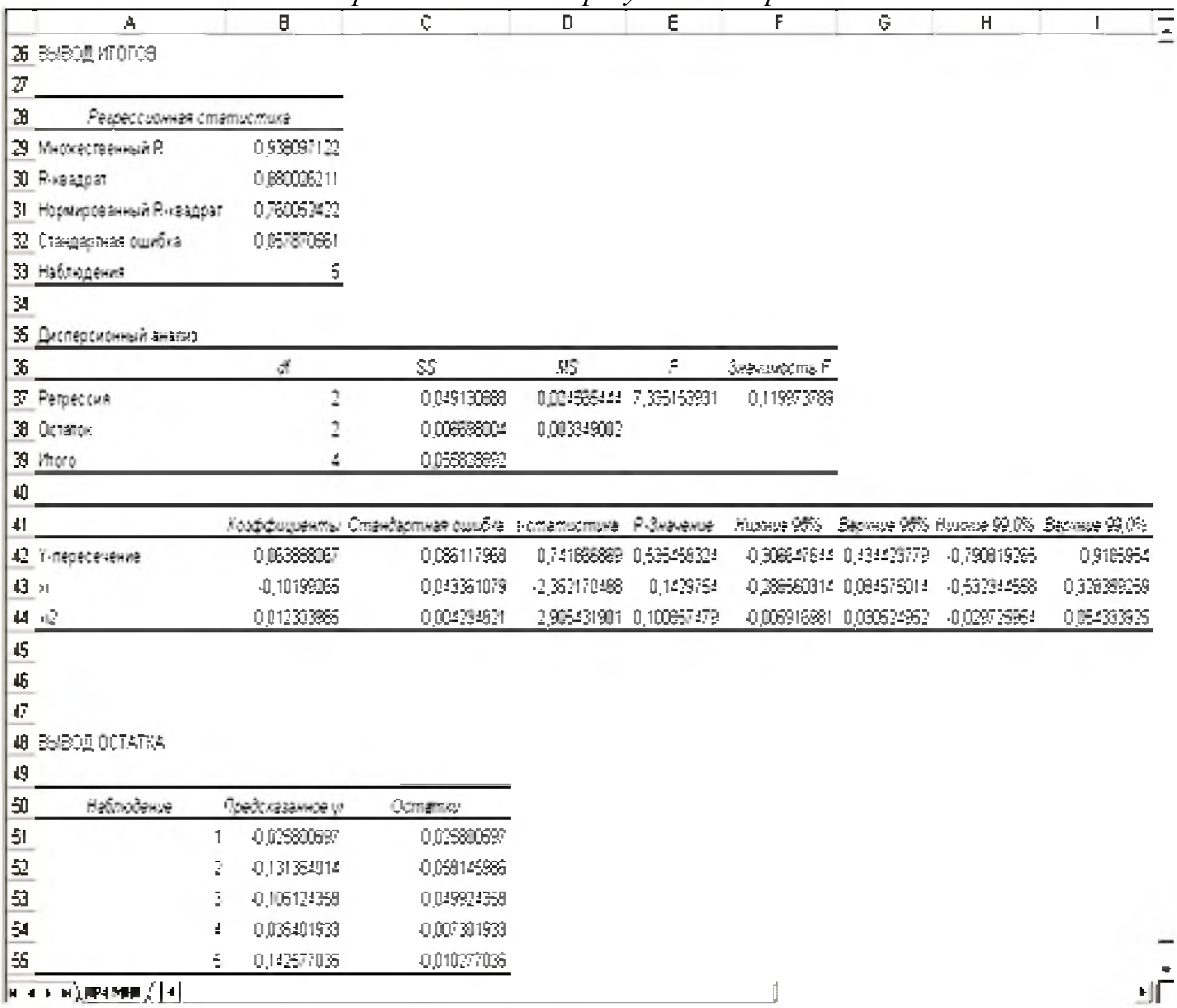
ЛР4 МНК

Аппроксимация с использованием надстройки Анализ данных MS Excel: **Сервис – Анализ данных… – Регрессия**:

…ечание: Если надстройка Анализ данных… MS Excel отсутствует, выполнить: **Сервис – Надстройки – Пакет Анализа**.



Вид рабочего листа с результатом расчета



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
26	ВЫВОД ИТОГОВ								
27									
28	*Регрессионная статистика*								
29	Множественный R	0,938097122							
30	R-квадрат	0,880006211							
31	Нормированный R-квадрат	0,760053422							
32	Стандартная ошибка	0,057870661							
33	Наблюдения	5							
34									
35	Дисперсионный анализ								
36		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
37	Регрессия	2	0,049130888	0,024565444	7,335153931	0,119973789			
38	Остаток	2	0,006698004	0,003349002					
39	Итого	4	0,055828892						
40									
41		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 99,0%*	*Верхние 99,0%*
42	Y-пересечение	0,063888067	0,086117968	0,741866889	0,535456324	-0,308647644	0,434423779	-0,790819265	0,9165954
43	x1	-0,10199065	0,043361079	-2,352170488	0,1429754	-0,288560814	0,084575014	-0,532344568	0,328389259
44	x2	0,012303865	0,004234631	2,905431901	0,100657479	-0,006916881	0,030524952	-0,029725964	0,054333935
45									
46									
47									
48	ВЫВОД ОСТАТКА								
49									
50	*Наблюдение*	*Предсказанное y*	*Остатки*						
51	1	-0,02580697	0,02580697						
52	2	-0,131364914	-0,058145986						
53	3	-0,106124358	0,049924358						
54	4	0,036401933	-0,007301933						
55	5	0,142577036	-0,010277036						

Лабораторная работа 6

Численное интегрирование

ЦЕЛЬ

Ознакомиться с численными методами интегрирования и их реализацией в MS Excel.

ЗАДАЧА

Вычислить приближенное значение интеграла с точностью ε = 0,0001 одним из методов:

1) по формуле прямоугольников;
2) по формуле трапеций;
3) по формуле Симпсона.

Для проверки вычислить точное значение интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.

Вариант	0	1	2	3	4
интеграл	$\int_2^3 \frac{\sin x}{x}dx$	$\int_0^1 \cos x^2 dx$	$\int_2^4 \frac{dx}{\ln x}$	$\int_0^2 e^{-x^2}dx$	$\int_1^3 \sqrt{1+\ln x}dx$

Вариант	5	6	7	8	9
интеграл	$\int_0^1 \frac{x}{\cos x}dx$	$\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sin x^2}$	$\int_1^2 \frac{dx}{1+\ln x}$	$\int_0^3 \frac{dx}{x+e^x}$	$\int_0^{1,5} \frac{\cos x}{x+1}dx$

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В MS EXCEL

Формула левых (правых) прямоугольников

Разбить отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h=\frac{b-a}{n}$): $x_0=a$; $x_i=x_0+ih$, $i=1,2\ldots,n-1$, $x_n=b$.

Вычислить значение функции $f(x)$ в узлах сетки $f_i=f(x_i)$.

Вычислить площади частичных прямоугольников по формулам:

формула левых прямоугольников $$s_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx hf(x_{i-1})$$

формула правых прямоугольников $$s_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx hf(x_i)$$

Найти приближенное значение интеграла

$$I_h \approx \sum_{i=1}^{n} s_i .$$

Разбить отрезок $[a;b]$ на $2n$ частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h=\frac{b-a}{2n}$): $x_0=a$; $x_i=x_0+ih$, $i=1,2\ldots,2n-1$, $x_{2n}=b$. Найти приближенное значение интеграла с новым шагом $I_{h/2}$.

Произвести оценку погрешности по формуле Рунге (p – порядок точности квадратурной формулы, для формулы левых и правых прямоугольников $p=1$)

$$r=\frac{I_{h/2}-I_h}{2^p-1} .$$

Уменьшать шаг, пока погрешность не станет меньше требуемой точности $r^i<\varepsilon$.

Для проверки вычислить точное значение интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.

Аналитическое решение

Вычислить значение интеграла $\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,dx$.

$$\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,dx = \int\limits_1^2 \ln(x+1)\,d(x+1) = (x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (x+1)\,d\ln(x+1) =$$

$$= (x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = (x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 =$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2 + 1 = \ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1.$$

Реализация в MS Excel

Вычислить значение интеграла $\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,dx$.

Подготовить исходные данные на листе:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ФОРМУЛА ЛЕВЫХ (ПРАВЫХ) ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ									
2				точность	$\varepsilon =$	0,001				
3			нижняя граница интервала			1				
4			верхняя граница интервала			2				
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954	=LN((F4+1)^(F4+1)/(F3+1)^(F3+1))-1			
6										
7	$p =$	1								
8	$n =$	10								
9	$h =$	0,1	=($F$4-$F$3)/B8							

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугольников

Провести расчет приближенного значения определенного интеграла по формуле левых (правых)

Вид рабочего листа с результатом расчета

	J	K	L	M	N	O
1	ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ					
2			1	2	3	4
3	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$
4	1	0	0,5	-2	1,77778	-24
5	1,1	0,09531	0,47619	-1,6671	1,86519	-121,2
6	1,2	0,18232	0,45455	-1,4307	1,94971	-697,23
7	1,3	0,26236	0,43478	-1,255	2,03139	-5671,8
8	1,4	0,33647	0,41667	-1,1197	2,11032	-116821
9	1,5	0,40547	0,4	-1,0125	2,18659	-1E+09
10	1,6	0,47	0,38462	-0,9255	2,26029	-780583
11	1,7	0,53063	0,37037	-0,8537	2,33151	-52347
12	1,8	0,58779	0,35714	-0,7933	2,40035	-13152
13	1,9	0,64185	0,34483	-0,7419	2,4669	-5410,5
14	2	0,69315	0,33333	-0,6977	2,53125	-2872,1
15	максимум	0,69315	0,5	-0,6977	2,53125	-24
16	x	2	1	2	2	1

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

Вид рабочего листа с формулами

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ											
2			1	2	3	4						
3	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$						
4	1	=LN(J4)	=(-1)^(L$2-1)*ФАКТР(L$2)/(J4+1)^L$2									
5	1,1											
6	1,2											
7	1,3											
8	1,4											
9	1,5											
10	1,6											
11	1,7											
12	1,8											
13	1,9											
14	2											
15	максимум	=МАКС(K4:K14)										
16	x	=ВЫБОР(ПОИСКПОЗ(K15;K4:K14;0);$J$4;$J$5;$J$6;$J$7;$J$8;$J$9;$J$10;$J$11;$J$12;$J$13;$J$14)										

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с заданным шагом с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом;

оценка погрешности данного метода приближенного вычисления определенного интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} h \max_{[a;b]} |f'(x)|;$$

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	ФОРМУЛА ЛЕВЫХ (ПРАВЫХ) ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ						
2				точность	$\varepsilon =$	0,001	
3			нижняя граница интервала			1	
4			верхняя граница интервала			2	
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954	
6							
7	$p =$	1					
8	$n =$	10					
9	$h =$	0,1					
10	$r =$	0,025					
11			левых	правых			
12	x	$f(x)$	I	I			
13	1	0,69315	0,06931	0,00000			
14	1,1	0,74194	0,14351	0,07419			

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА ЛЕВЫХ (ПРАВЫХ) ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ					
2				точность	$\varepsilon =$	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5				точное значение интеграла	$I =$	0,90954
6						
7	$p =$	1				
8	$n =$	10				
9	$h =$	0,1				
10	$r =$	=(F4-F3)/2*B9*(1/(F3+1))				
11			левых	правых		
12	x	$f(x)$	I	I		
13	1	0,69315	0,06931	0,00000		
14	1,1	0,74194	=C13+ЕСЛИ(A14<$F$4,B$9*B14,0)	=D13+ЕСЛИ(A14=$F$3,0,B$9*B14)		

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки:

	A	B	C	D
11			левых	правых
12	x	$f(x)$	I	I
13	=A14	=B14	=C14	=D14
14	1,1	0,74194	0,14351	0,07419

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за вычислительным процессом:

	A	B	C	D	E	F	G
1	ФОРМУЛА ЛЕВЫХ (ПРАВЫХ) ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ						
2				точность	$\varepsilon =$	0,001	
3			нижняя граница интервала			1	
4			верхняя граница интервала			2	
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954	
6							
7	$p =$	1					
8	$n =$	10					
9	$h =$	0,1					
10	$r =$	0,025					
11			левых	правых			
12	x	$f(x)$	I	I			
13	1,9	1,06471	0,88913	0,81982			
14	2	1,09861	0,88913	0,92968			

ЛР7 ФормулаЛевыхПрямоугол (Ит)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Формула средних прямоугольников

Разбить отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков (построить на отрезке $[a; b]$ сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$): $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2\ldots, n-1$, $x_n = b$.

Посчитать координаты средних точек частичных отрезков

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Вычислить значение функции $f(x)$ в средних точках $f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$.

Вычислить площади частичных прямоугольников по формуле:

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx hf(x_{i-1/2}).$$

Найти приближенное значение интеграла

$$I_h \approx \sum_{i=1}^{n} s_i \ .$$

Разбить отрезок $[a;b]$ на $2n$ частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{2n}$): $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2 \dots, 2n-1$, $x_{2n} = b$. Найти приближенное значение интеграла с новым шагом $I_{h/2}$.

Произвести оценку погрешности по формуле Рунге (p – порядок точности квадратурной формулы, для формулы средних прямоугольников $p = 1$)

$$r = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}.$$

Уменьшать шаг, пока погрешность не станет меньше требуемой точности $r^i < \varepsilon$.

Для проверки вычислить точное значение интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.

Реализация в MS Excel

Расчет приближенного значения определенного интеграла по формуле средних прямоугольников с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	ФОРМУЛА СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ											
2				точность	$\varepsilon =$	0,001						
3			нижняя граница интервала			1						
4			верхняя граница интервала			2						
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954						
6												
7	$p =$	1										
8	$n =$	10				20						
9	$h =$	0.1				0,05						
10	$I =$			0,90961				0,90956				
11	$r =$							0,00005	итерационный процесс закончен			
12	x	$x_{ср}$	$f(x_{ср})$	s_i	x	$x_{ср}$	$f(x_{ср})$	s_i				
13	1	0	0	0.00000	1	0	0	0,00000				
14	1,1	1,05	0,71784	0,07178	1,05	1,025	0,70557	0,03528				
15	1,2	1,15	0,76547	0,07655	1,1	1,075	0,72996	0,03650				
16	1,3	1.25	0,81093	0.08109	1,15	1,125	0,75377	0,03769				
17	1,4	1,35	0,85442	0,08544	1,2	1,175	0,77703	0,03885				
18	1,5	1,45	0,89609	0,08961	1,25	1,225	0,79976	0,03999				
19	1,6	1,55	0,93609	0,09361	1,3	1,275	0,82198	0,04110				
20	1,7	1,65	0,97456	0,09746	1,35	1,325	0,84372	0,04219				
21	1,8	1.75	1.0116	0.10116	1,4	1,375	0,865	0,04325				
22	1,9	1,85	1,04732	0,10473	1,45	1,425	0,88583	0,04429				
23	2	1,95	1,08181	0,10818	1,5	1,475	0,90624	0,04531				
24					1,55	1,525	0,92624	0,04631				
25					1,6	1,575	0,94585	0,04729				
26					1,65	1,625	0,96508	0,04825				
27					1,7	1,675	0,98395	0,04920				
28					1,75	1,725	1,00247	0,05012				
29					1.8	1,775	1,02065	0,05103				
30					1,85	1,825	1,03851	0,05193				
31					1.9	1,875	1,05605	0,05280				
32					1,95	1,925	1,07329	0,05366				
33					2	1,975	1,09024	0,05451				

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугольник

Вид рабочего листа с формулами

H11 — f_x =ABS((H10-D10)/(2^$B$7-1))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ФОРМУЛА СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ								
2				точность	ε =	0,001			
3			нижняя граница интервала			1			
4			верхняя граница интервала			2			
5			точное значение интеграла		I =	0.90954			
6									
7	p =	1							
8	n =	10				20			
9	h =	0.1				0.05			
10	I =			=СУММ(D13:D23)				=СУММ(H13:H33)	
11	r =							=ABS((H	=ЕСЛИ(H11>$F$2;"","итерационный процесс закончен")
12	x	x_{cp}	$f(x_{cp})$	s_1	x	x_{cp}	$f(x_{cp})$	s_2	
13	=$F$3	=ЕСЛИ(A13=$F$3;0;(A13+A12)/2)	=LN(B13+1)	=B$9*C13					
14	=ЕСЛИ(A13+B$9>$F$4;"",A13+B$9)								

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугольник

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с заданным шагом с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом;

оценка погрешности данного метода приближенного вычисления определенного интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} h \max_{[a;b]} f'(x);$$

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ					
2				точность	ε =	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			I =	0,90954
6						
7	p =	1				
8	n =	10				
9	h =	0,1				
10	r =	0,025				
11						
12	x	x_{cp}	$f(x_{cp})$	I		
13	1	0	0	0,00000		
14	1,1	1,05	0,71784	0,07178		

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугол (И)

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ					
2				точность	ε =	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			I =	0,90954
6						
7	p =	1				
8	n =	10				
9	h =	0,1				
10	r =	0,025				
11						
12	x	x_{cp}	$f(x_{cp})$	I		
13	1	0	0	0,00000		
14	1,1	1,05	0,71784	=D13+B$9*C14		

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугол (И)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки:

	A	B	C	D
12	x	$x_{ср}$	$f(x_{ср})$	I
13	=A14	=B14	=C14	=B$9*C13
14	1,1	1,05	0,71784	0,07178

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугол (И)

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за вычислительным процессом:

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ					
2				точность	$\varepsilon =$	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954
6						
7	$p =$	1				
8	$n =$	10				
9	$h =$	0,1				
10	$r =$	0,025				
11						
12	x	$x_{ср}$	$f(x_{ср})$	I		
13	1,9	1,85	1,04732	0,80143		
14	2	1,95	1,08181	0,90961		

ЛР7 ФормулаСреднихПрямоугол (И)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Формула трапеций

Разбить отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$): $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2 \ldots, n-1$, $x_n = b$.

Вычислить значение функции $f(x)$ в узлах сетки $f_i = f(x_i)$.

Вычислить площади частичных трапеций по формуле:

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right).$$

Найти приближенное значение интеграла

$$I_h \approx \sum_{i=1}^{n} s_i .$$

Разбить отрезок $[a;b]$ на $2n$ частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{2n}$): $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2 \ldots, 2n-1$, $x_{2n} = b$. Найти приближенное значение интеграла с новым шагом $I_{h/2}$.

Произвести оценку погрешности по формуле Рунге (p – порядок точности квадратурной формулы, для формулы трапеций $p = 2$)

$$r = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}.$$

Уменьшать шаг, пока погрешность не станет меньше требуемой точности $r^{i} < \varepsilon$.
Для проверки вычислить точное значение интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.

Реализация в MS Excel

Расчет приближенного значения определенного интеграла по формуле трапеций с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1	**ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ**						
2				точность	$\varepsilon =$	0,001	
3			нижняя граница интервала			1	
4			верхняя граница интервала			2	
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954	
6							
7	$p =$	2					
8	$n =$	10			20		
9	$h =$	0,1			0,05		
10	$I =$		0,90940			0,90951	
11	$r =$					0,00003	итерационный процесс закончен
12	x	$f(x)$	s_i	x	$f(x)$	s_i	
13	1	0,69315	0,00000	1	0,69315	0,00000	
14	1,1	0,74194	0,07175	1,05	0,71784	0,03527	
15	1,2	0,78846	0,07652	1,1	0,74194	0,03649	
16	1,3	0,83291	0,08107	1,15	0,76547	0,03769	
17	1,4	0,87547	0,08542	1,2	0,78846	0,03885	
18	1,5	0,91629	0,08959	1,25	0,81093	0,03998	
19	1,6	0,95551	0,09359	1,3	0,83291	0,04110	
20	1,7	0,99325	0,09744	1,35	0,85442	0,04218	
21	1,8	1,02962	0,10114	1,4	0,87547	0,04325	
22	1,9	1,06471	0,10472	1,45	0,89609	0,04429	
23	2	1,09861	0,10817	1,5	0,91629	0,04531	
24				1,55	0,93609	0,04631	
25				1,6	0,95551	0,04729	
26				1,65	0,97456	0,04825	
27				1,7	0,99325	0,04920	
28				1,75	1,0116	0,05012	
29				1,8	1,02962	0,05103	
30				1,85	1,04732	0,05192	
31				1,9	1,06471	0,05280	
32				1,95	1,08181	0,05366	
33				2	1,09861	0,05451	

ЛР7 ФормулаТрапеций

Вид рабочего листа с формулами

F11 f_x =ABS((F10-C10)/(2^$B$7-1))

	A	B	C	D	E	F	G
1	ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ						
2				точность	$\varepsilon =$	0,001	
3			нижняя граница интервала			1	
4			верхняя граница интервала			2	
5			точное значение интеграла		$I =$	0,90954	
6							
7	$p =$	2					
8	$n =$	10			20		
9	$h =$	0,1			0,05		
10	$I =$		=СУММ(C13:C23)		=СУММ(F13:F33)		
11	$r =$					=ABS((F	=ЕСЛИ(F11>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")
12	x	$f(x)$	s_i	x	$f(x)$	s_i	
13	=$F$3	=LN(A13+1)	=ЕСЛИ(A13=$F$3;0;B$9*(B13+B12)/2)				
14	=ЕСЛИ(A13+B$9>$F$4;"";A13+B$9)						

ЛР7 ФормулаТрапеций

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с заданным шагом с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом;

оценка погрешности данного метода приближенного вычисления определенного интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} h^2 \max_{[a;b]} f''(x);$$

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F
1	**ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ**					
2				точность	ε =	0,001
3					нижняя граница интервала	1
4					верхняя граница интервала	2
5		точное значение интеграла			I =	0,90954
6						
7	p =	2				
8	n =	10				
9	h =	0,1				
10	r =	0,00556				
11						
12	x	$f(x)$	I			
13	1	0,69315	0,00000			
14	1,1	0,74194	0,07175			

ЛР7 ФормулаТрапеций (Итерации)

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G
1	**ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ**						
2				точность	ε =	0,001	
3					нижняя граница интервала	1	
4					верхняя граница интервала	2	
5		точное значение интеграла			I =	0,90954	
6							
7	p =	2					
8	n =	10					
9	h =	0,1					
10	r =	=ABS((F4-F3)/2*B9*(-1/(F4+1)^2))					
11							
12	x	$f(x)$	I				
13	1	0,69315	0,00000				
14	1,1	0,74194	=C13+ЕСЛИ(A14=$F$3;0;B$9*(B14+B13)/2)				

ЛР7 ФормулаТрапеций (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки:

	A	B	C
12	x	$f(x)$	I
13	=A14	=B14	=C14
14	1,1	0,74194	0,07175

ЛР7 ФормулаТрапеций (

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за вычислительным процессом:

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ					
2				точность	$\varepsilon =$	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954
6						
7	$p =$	2				
8	$n =$	10				
9	$h =$	0,1				
10	$r =$	0,00556				
11						
12	x	$f(x)$	I			
13	1,9	1,06471	0,80124			
14	2	1,09861	0,90940			

ЛР7 ФормулаТрапеций (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Формула Симпсона

Разбить отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h=\dfrac{b-a}{n}$): $x_0=a$; $x_i=x_0+ih$, $i=1,2\ldots,n-1$, $x_n=b$.

Посчитать координаты средних точек частичных отрезков

$$x_{i-1/2}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}.$$

Вычислить значение функции $f(x)$ в узлах сетки $f_i=f(x_i)$.

Вычислить значение функции $f(x)$ в средних точках $f_{i-1/2}=f(x_{i-1/2})$.

Вычислить площади частичных трапеций по формуле:

$$s_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left(f(x_{i-1})+4f(x_{i-1/2})+f(x_i)\right).$$

Найти приближенное значение интеграла

$$I_h\approx\sum_{i=1}^{n}s_i.$$

Разбить отрезок $[a;b]$ на $2n$ частичных отрезков (построить на отрезке $[a;b]$ сетку с шагом $h=\dfrac{b-a}{2n}$): $x_0=a$; $x_i=x_0+ih$, $i=1,2\ldots,2n-1$, $x_{2n}=b$. Найти приближенное значение интеграла с новым шагом $I_{h/2}$.

Произвести оценку погрешности по формуле Рунге (p – порядок точности квадратурной формулы, для формулы Симпсона $p = 4$)

$$r = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}.$$

Уменьшать шаг, пока погрешность не станет меньше требуемой точности $r^i < \varepsilon$.

Для проверки вычислить точное значение интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.

Реализация в MS Excel

Расчет приближенного значения определенного интеграла по формуле Симпсона с помощью таблицы вычислений:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ФОРМУЛА СИМПСОНА										
2				точность	$\varepsilon =$	0,001					
3			нижняя граница интервала			1					
4			верхняя граница интервала			2					
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954					
6											
7	$p =$	4									
8	$n =$	10					20				
9	$h =$	0,1					0,05				
10	$I =$				0,90954					0,90954	
11	$r =$									3,813E-10	итерационный процесс закончен
12	x	$x_{ср}$	$f(x)$	$f(x_{ср})$	s_i	x	$x_{ср}$	$f(x)$	$f(x_{ср})$	s_i	
13	1	0	0,69315	0	0,00000	1	0	0,69315	0	0,00000	
14	1,1	1,05	0,74194	0,71784	0,07177	1,05	1,025	0,71784	0,70557	0,03528	
15	1,2	1,15	0,78846	0,76547	0,07654	1,1	1,075	0,74194	0,72996	0,03650	
16	1,3	1,25	0,83291	0,81093	0,08108	1,15	1,125	0,76547	0,75377	0,03769	
17	1,4	1,35	0,87547	0,85442	0,08543	1,2	1,175	0,78846	0,77703	0,03885	
18	1,5	1,45	0,91629	0,89609	0,08960	1,25	1,225	0,81093	0,79976	0,03999	
19	1,6	1,55	0,95551	0,93609	0,09360	1,3	1,275	0,83291	0,82198	0,04110	
20	1,7	1,65	0,99325	0,97456	0,09745	1,35	1,325	0,85442	0,84372	0,04219	
21	1,8	1,75	1,02962	1,0116	0,10115	1,4	1,375	0,87547	0,865	0,04325	
22	1,9	1,85	1,06471	1,04732	0,10473	1,45	1,425	0,89609	0,88583	0,04429	
23	2	1,95	1,09861	1,08181	0,10818	1,5	1,475	0,91629	0,90624	0,04531	
24						1,55	1,525	0,93609	0,92624	0,04631	
25						1,6	1,575	0,95551	0,94585	0,04729	
26						1,65	1,625	0,97456	0,96508	0,04825	
27						1,7	1,675	0,99325	0,98395	0,04920	
28						1,75	1,725	1,0116	1,00247	0,05012	
29						1,8	1,775	1,02962	1,02065	0,05103	
30						1,85	1,825	1,04732	1,03851	0,05192	
31						1,9	1,875	1,06471	1,05605	0,05280	
32						1,95	1,925	1,08181	1,07329	0,05366	
33						2	1,975	1,09861	1,09024	0,05451	

ЛР7 ФормулаСимпсона

Вид рабочего листа с формулами

J11 =ABS((J10-E10)/(2^$B$7-1))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ФОРМУЛА СИМПСОНА										
2				точность	$\varepsilon =$	0,001					
3			нижняя граница интервала			1					
4			верхняя граница интервала			2					
5			точное значение интеграла		$I =$	0.90954					
6											
7	$p =$	4									
8	$n =$	10					20				
9	$h =$	0,1					0,05				
10	$I =$				=СУММ(E13 E23)					=СУММ(J13 J33)	
11	$r =$									=ABS((J10	=ЕСЛИ(J11>$F$2;"";"итерационный процесс закончен")
12	x	$x_{ср}$	$f(x)$	$f(x_{ср})$	s_i	x	$x_{ср}$	$f(x)$	$f(x_{ср})$	s_i	
13	=$F$3	=ЕСЛИ(A13=$F$3,0,(A13+A12)/2)	=LN(A13+1)	=LN(B13+1)	=ЕСЛИ(A13=$F$3;0;(B$9/6)*(C12+4*D13+C13))						
14	=ЕСЛИ(A13+B$9>$F$4;"";A13+B$9)										

ЛР7 ФормулаСимпсона

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с заданным шагом с использованием режима Итерации MS Excel (вручную):

создать копию листа: **Правка – Переместить/Скопировать лист…**, на которой удалить строки с итерационным процессом;

оценка погрешности данного метода приближенного вычисления определенного интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} h^4 \max_{[a;b]} f^{IV}(x);$$

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА СИМПСОНА					
2				точность	$\varepsilon =$	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954
6						
7	$p =$	4				
8	$n =$	10				
9	$h =$	0,1				
10	$r =$	0,01875				
11						
12	x	x_{cp}	$f(x)$	$f(x_{cp})$	I	
13	1	0	0,69315	0	0,00000	
14	1,1	1,05	0,74194	0,71784	0,07177	

ЛР7 ФормулаСимпсона (Итерации)

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ФОРМУЛА СИМПСОНА									
2				точность	$\varepsilon =$	0,001				
3			нижняя граница интервала			1				
4			верхняя граница интервала			2				
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954				
6										
7	$p =$	4								
8	$n =$	10								
9	$h =$	0,1								
10	$r =$	0,01875								
11										
12	x	x_{cp}	$f(x)$	$f(x_{cp})$	I					
13	1	0	0,69315	0	0,00000					
14	1,1	1,05	0,74194	0,71784	=E13+ЕСЛИ(A14=$F$3;0;(B$9/6)*(C13+4*D14+C14))					

ЛР7 ФормулаСимпсона (Итерации)

настроить MS Excel на выполнение итераций вручную: **Сервис – Параметры – Вычисления – вручную**; **итерации** разрешить, **Предельное число итераций** – 1, **Относительная погрешность** – 0,001;

организовать в таблице циклические ссылки:

	A	B	C	D	E
12	x	x_{cp}	$f(x)$	$f(x_{cp})$	I
13	=A14	=B14	=C14	=D14	=E14
14	1,1	1,05	0,74194	0,71784	0,07177

ЛР7 ФормулаСимпсона (Итерации)

нажимать клавишу **F9**, наблюдая за вычислительным процессом:

	A	B	C	D	E	F
1	ФОРМУЛА СИМПСОНА					
2				точность	$\varepsilon =$	0,001
3			нижняя граница интервала			1
4			верхняя граница интервала			2
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954
6						
7	$p =$	4				
8	$n =$	10				
9	$h =$	0,1				
10	$r =$	0,01875				
11						
12	x	x_{cp}	$f(x)$	$f(x_{cp})$	I	
13	1,9	1,85	1,06471	1,04732	0,80137	
14	2	1,95	1,09861	1,08181	0,90954	

ЛР7 ФормулаСимпсона (Итерации)

После окончания вычислительного процесса выполнить: **Сервис – Параметры – Вычисления** и вернуть предустановленные настройки.

Использование макросов MS EXCEL

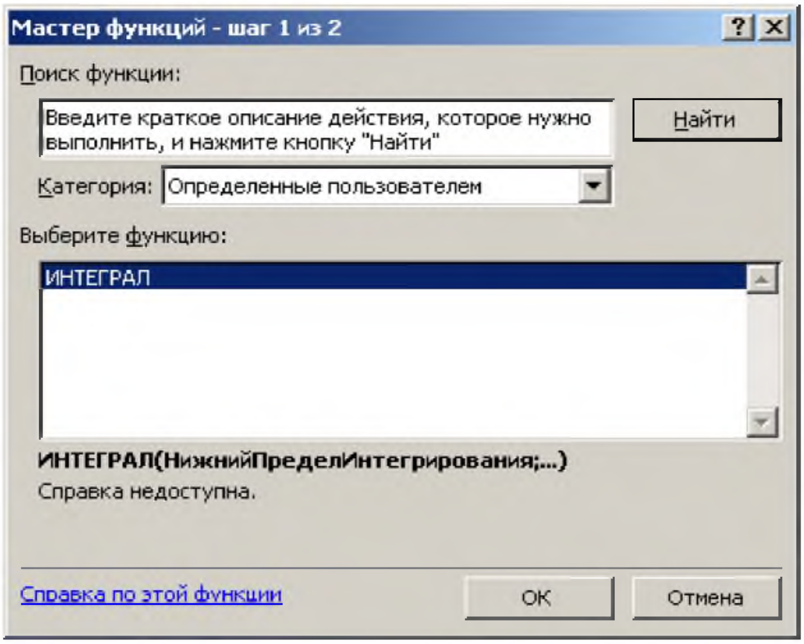
Интегрирование с использованием макросов MS Excel: **Сервис – Макрос – Редактор Visual Basic**:

вставить новый модуль: **Insert – Module**;

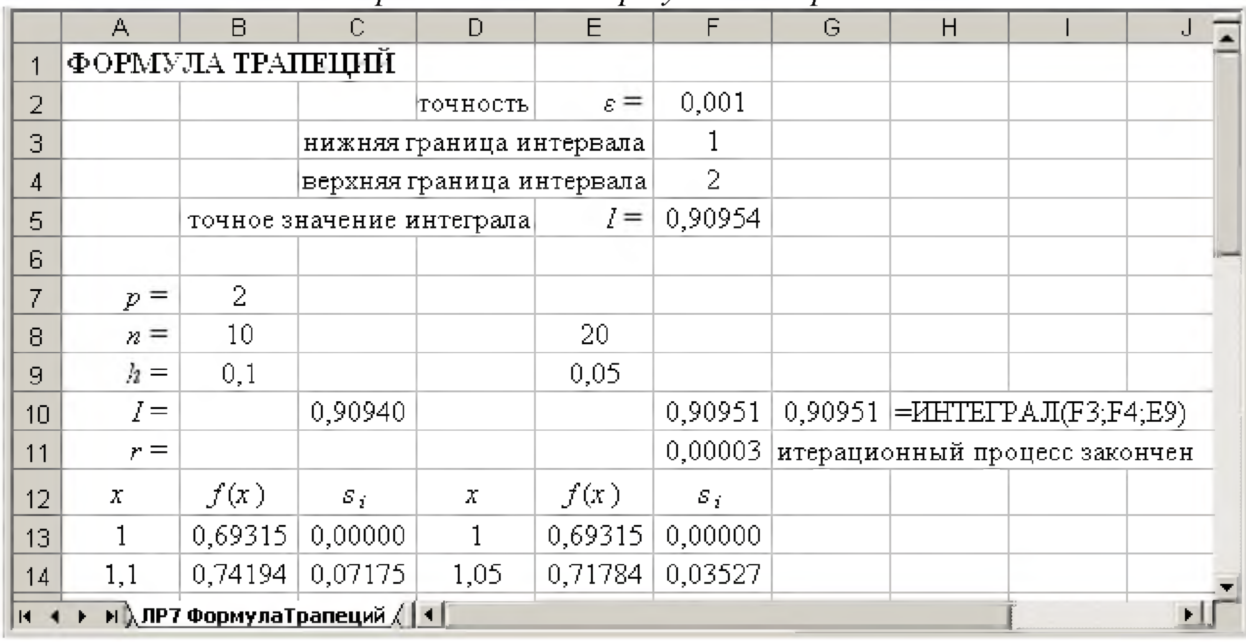
ввести текст процедуры:

```
Option Explicit
'Вычисление интеграла по формуле трапеций
Function ИНТЕГРАЛ(НижнийПределИнтегрирования As Double, _
ВерхнийПределИнтегрирования As Double, _
ШагИнтегрирования As Double) As Double
Dim dblX As Double 'Переменная интегрирования
Dim dblF As Double 'Член суммы (площадь трапеции)
Dim dblF1 As Double 'Первая часть члена суммы
Dim dblF2 As Double 'Вторая часть члена суммы
Dim Шаг As Double 'Шаг интегрирования
Шаг = ШагИнтегрирования
'Обнуление переменной суммирования
ИНТЕГРАЛ = 0
'Цикл интегрирования, за который вычисляется площадь одной трапеции
For dblX = НижнийПределИнтегрирования To ВерхнийПределИнтегрирования Step Шаг
'Вычисление одного члена суммы по формуле трапеций
dblF1 = Log(dblX + 1)
dblF2 = Log(dblX + Шаг + 1)
dblF = Шаг * (dblF1 + dblF2) / 2
'Добавление рассчитанной площади трапеции к сумме имеющихся
ИНТЕГРАЛ = ИНТЕГРАЛ + dblF
'Конец цикла
Next dblX
'Конец функции
End Function
```

проверить работу процедуры:



Вид рабочего листа с результатом расчета



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ									
2				точность	$\varepsilon =$	0,001				
3			нижняя граница интервала			1				
4			верхняя граница интервала			2				
5		точное значение интеграла			$I =$	0,90954				
6										
7	$p =$	2								
8	$n =$	10			20					
9	$h =$	0,1			0,05					
10	$I =$		0,90940			0,90951	0,90951	=ИНТЕГРАЛ(F3;F4;E9)		
11	$r =$					0,00003	итерационный процесс закончен			
12	x	$f(x)$	s_i	x	$f(x)$	s_i				
13	1	0,69315	0,00000	1	0,69315	0,00000				
14	1,1	0,74194	0,07175	1,05	0,71784	0,03527				

ЛР7 ФормулаТрапеций

Лабораторная работа7- 8 «Численное решение задачи коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

ЦЕЛЬ

Ознакомиться с численными методами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их реализацией в MS Excel.

ЗАДАЧА

Решить уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ одним из методов:

1) Эйлера;
2) Эйлера с пересчетом;
3) Рунге–Кутта четвертого порядка точности;
4) Адамса четвертого порядка точности.

Найденное приближенное решение сравнить с точным.

Вариант	ДУ с н.у.	Точное решение	Вариант	ДУ с н.у.	Точное решение
0	$xy'+2y=3x$ $y(-1)=1$	$y=x+\frac{2}{x^2}$	5	$y'=4x-2y$ $y(0)=6$	$y=5e^{-2x}-2x+1$
1	$yy'=3$ $y(6)=10$	$y=\sqrt{6x+64}$	6	$y'=(x-y)^2+1$ $y(0)=1$	$y=x+\frac{1}{1+x}$
2	$x^2y=5xy+6$ $y(1)=1$	$y=2x^5-\frac{1}{x}$	7	$y'=e^{2x}+4y$ $y(0)=0,5$	$y=e^{4x}-0,5e^{2x}$
3	$y'-2xy-y=0$ $y(0)=\sqrt{3}$	$y=\sqrt{3}e^{x^2+x}$	8	$y'=-\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$ $y(1)=1$	$y=\frac{\ln\lvert x\rvert+1}{x}$
4	$y'\sqrt{1+x^2}-y=0$ $y(0)=4$	$y=4\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	9	$y'=\frac{y(2-x)}{x(x-1)}-\frac{1}{x^2(x-1)}$ $y(2)=0,25$	$y=\frac{1}{x^2}$

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В MS EXCEL

Метод Эйлера

Построить сетку с шагом h. Значение шага выбирается из соображений требуемой точности, учитывая, что порядок точности метода Эйлера $p=1$. Левая граница отрезка, на котором строится сетка, x_0 задана начальными условиями задачи Коши.

Решение дифференциального уравнения ищется в виде сеточной функции. Значение y_0 известно из начальных условий, все следующие значения y рассчитываются по формуле Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

где $f(x_i, y_i)$ – правая часть дифференциального уравнения.

Для проверки сравнить значения приближенного решения со значениями точного решения в узлах сетки.

Реализация в MS Excel

Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

ДУ с н.у.	Точное решение

$y' = 2(x^2 + y)$ $y(0) = 1$	$y = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$

Подготовить исходные данные на листе и провести расчет по методу Эйлера:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		$y' = 2(x^2+y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$							
2	н.у.	$x_0 =$	0									
3		$y_0 =$	1									
4	шаг	$h =$	0,1									
5												
6	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
7	**Точное решение**											
8	y_m	1	1,2221	1,4977	1,8432	2,2783	2,8274	3,5202	4,3928	5,4895	6,8645	8,5836
9												
10	МЕТОД ЭЙЛЕРА											
11	y	1	1,2000	1,4420	1,7384	2,1041	2,5569	3,1183	3,8139	4,6747	5,7377	7,0472

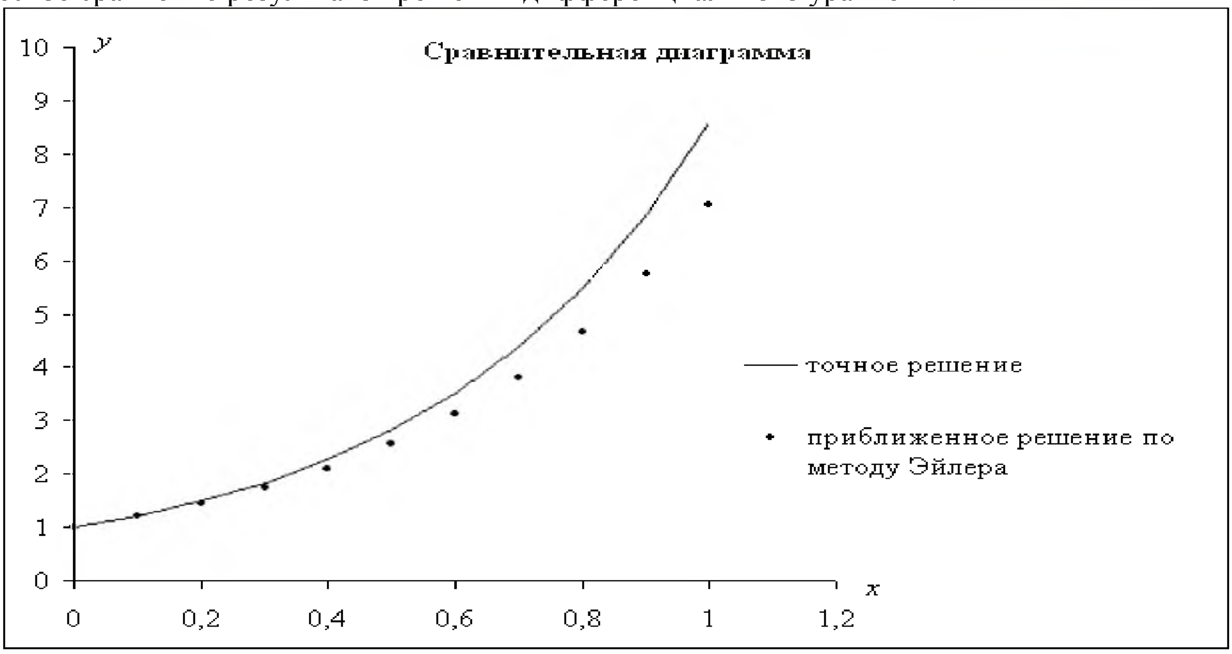
ЛР8 ДУ1Порядка

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G
1		$y' = 2(x^2+y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$		
2	н.у.	$x_0 =$	0				
3		$y_0 =$	1				
4	шаг	$h =$	0,1				
5							
6	x	=C2	=B6+$C$4				
7	**Точное решение**						
8	y_m	=1,5*EXP(2*B6)-B6^2-B6-0,5					
9							
10	МЕТОД ЭЙЛЕРА						
11	y	=C3	=B11+$C$4*2*(B6^2+B11)				

ЛР8 ДУ1Порядка

Графическое сравнение результатов решения дифференциального уравнения:



Модифицированный метод Эйлера

Построить сетку с шагом h. Значение шага выбирается из соображений требуемой точности, учитывая, что порядок точности модифицированного метода Эйлера $p = 2$. Левая граница отрезка, на котором строится сетка, x_0 задана начальными условиями задачи Коши.

Решение дифференциального уравнения ищется в виде сеточной функции. Значение y_0 известно из начальных условий, все следующие значения y рассчитываются по модифицированной формуле Эйлера (формула Эйлера с пересчетом):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right],$$

где $f(x_i, y_i)$ – правая часть дифференциального уравнения;

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ – вычисляется предварительно по формуле простого метода Эйлера.

Для проверки сравнить значения приближенного решения со значениями точного решения в узлах сетки.

Реализация в MS Excel

Провести расчет по модифицированному методу Эйлера:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		$y' = 2(x^2 + y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$							
2	н.у.	$x_0 =$	0									
3		$y_0 =$	1									
4	шаг	$h =$	0,1									
5												
6	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
7	**Точное решение**											
8	y_m	1	1,2221	1,4977	1,8432	2,2783	2,8274	3,5202	4,3928	5,4895	6,8645	8,5836
9												
10	**МЕТОД ЭЙЛЕРА**											
11	y	1	1,2000	1,4420	1,7384	2,1041	2,5569	3,1183	3,8139	4,6747	5,7377	7,0472
12												
13	**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА**											
14	y	1	1,2210	1,4923	1,8284	2,2466	2,7680	3,4176	4,2257	5,2288	6,4704	8,0032

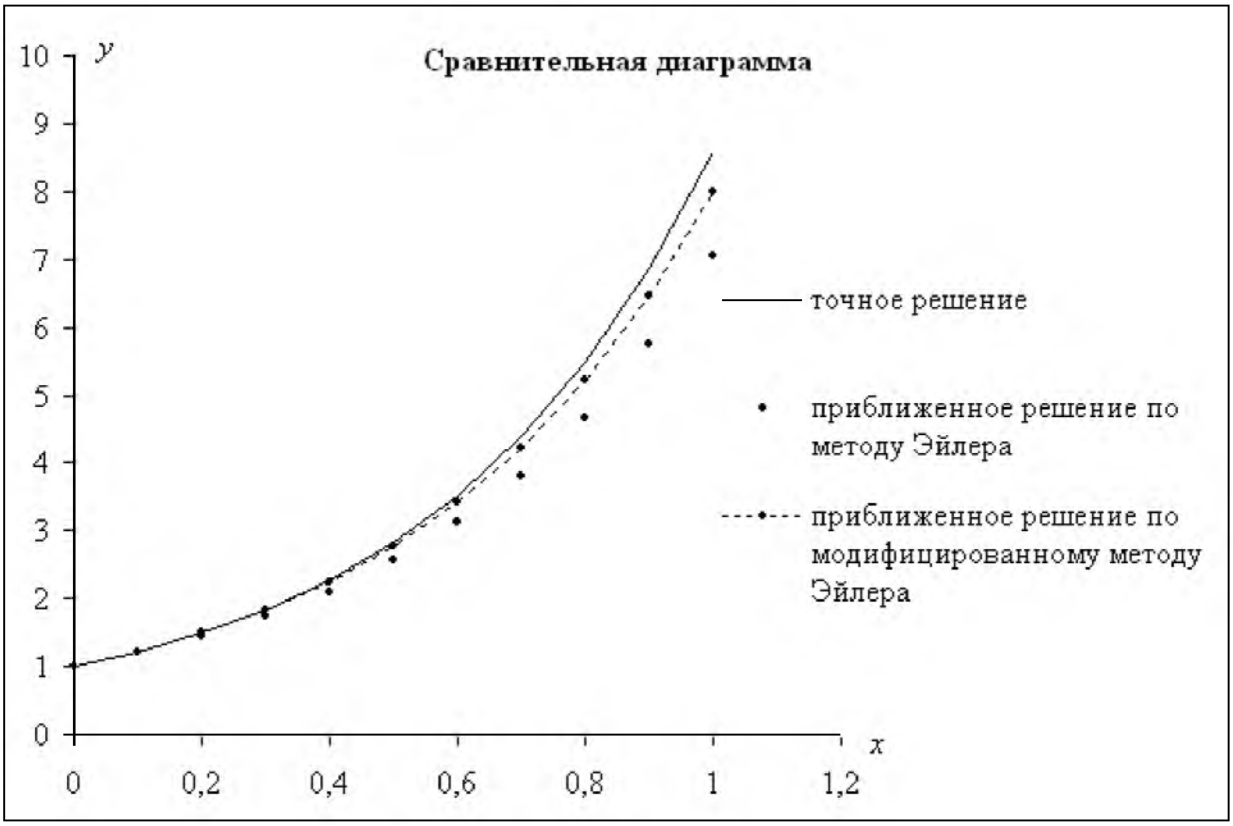
ЛР8 ДУ1Порядка

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G
1		$y' = 2(x^2 + y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$		
2	н.у.	$x_0 =$	0				
3		$y_0 =$	1				
4	шаг	$h =$	0,1				
12							
13	**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА**						
14	y	=C3	=B14+($C$4/2)*(2*(B6^2+B14)+2*(C6^2+C11))				

ЛР8 ДУ1Порядка

Графическое сравнение результатов решения дифференциального уравнения:



Метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности

Построить сетку с шагом h. Значение шага выбирается из соображений требуемой точности, учитывая, что порядок точности метода $p = 4$. Левая граница отрезка, на котором строится сетка, x_0 задана начальными условиями задачи Коши.

Решение дифференциального уравнения ищется в виде сеточной функции. Значение y_0 известно из начальных условий, все следующие значения y рассчитываются по формулам Рунге–Кутта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_3),$$

где $f(x_i, y_i)$ – правая часть дифференциального уравнения;

k_1, k_2, k_3, k_4 – вспомогательные функции, значения которых вычисляются предварительно для каждого i.

Для проверки сравнить значения приближенного решения со значениями точного решения в узлах сетки.

Реализация в MS Excel

Провести расчет по методу Рунге–Кутта четвертого порядка точности:

Вид рабочего листа с результатом расчета

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		$y' = 2(x^2 + y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$							
2	н.у.	$x_0 =$	0									
3		$y_0 =$	1									
4	шаг	$h =$	0,1									
5												
6	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
7	**Точное решение**											
8	y_m	1	1,2221	1,4977	1,8432	2,2783	2,8274	3,5202	4,3928	5,4895	6,8645	8,5836
9												
10	МЕТОД ЭЙЛЕРА											
11	y	1	1,2000	1,4420	1,7384	2,1041	2,5569	3,1183	3,8139	4,6747	5,7377	7,0472
12												
13	МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА											
14	y	1	1,2210	1,4923	1,8284	2,2466	2,7680	3,4176	4,2257	5,2288	6,4704	8,0032
15												
16	МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ											
17	k_1	0,2	0,2464	0,3075	0,3866	0,4877	0,6155	0,7760	0,9765	1,2259	1,5349	
18	k_2	0,2205	0,2736	0,3428	0,4318	0,5449	0,6875	0,8661	1,0887	1,3650	1,7069	
19	k_3	0,2226	0,2763	0,3463	0,4363	0,5507	0,6947	0,8751	1,0999	1,3789	1,7241	
20	k_4	0,2465	0,3077	0,3868	0,4879	0,6158	0,7764	0,9771	1,2265	1,5357	1,9177	
21	y	1	1,2221	1,4977	1,8432	2,2783	2,8274	3,5201	4,3927	5,4894	6,8643	8,5834

ЛР8 ДУ1Порядка

Вид рабочего листа с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		$y' = 2(x^2 + y)$			$y_m = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$			
2	н.у.	$x_0 =$	0					
3		$y_0 =$	1					
4	шаг	$h =$	0,1					
15								
16	МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ							
17	k_1	=$C$4*2*(B6^2+B21)						
18	k_2	=$C$4*2*((B$6+$C$4/2)^2+B$21+B17/2)						
19	k_3	=$C$4*2*((B$6+$C$4/2)^2+B$21+B18/2)						
20	k_4	=$C$4*2*(C6^2+B21+B19)						
21	y	=C3	=B21+(B17+2*B18+2*B19+B20)/6					

ЛР8 ДУ1Порядка

Графическое сравнение результатов решения дифференциального уравнения:

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы (представлен в матрице компетенций ниже)

Матрица соотнесения тем/разделов учебной дисциплины/модуля и формируемых в них профессиональных и общекультурных компетенций как механизм выбора образовательных технологий и оценочных средств

Темы, разделы дисциплины	Кол-во часов Л/ЛР/ СРС	Компетенции			$t_{ср}$
		ОПК-1	ОПК-3	Общее кол-во компетенций	
Раздел 1. Введение.	6/6/14	+		1	26
Раздел 2. Приближенные числа и действия над ними	1/1/3	+	+	2	2,5
Раздел 3. Интерполяция функций	1/1/4		+	1	6
Раздел 4. Численное решение нелинейных уравнений	1/1/4	+	+	2	3
Раздел 5. Численное решение систем линейных уравнений	1/1/4	+	+	2	3
Раздел 6. Численное решение систем нелинейных уравнений	1/1/4		+	1	6
Раздел 7. Численное интегрирование	2/2/8	+		1	12
Раздел 8. Численное дифференцирование	1/1/4	+	+	2	3
Раздел 9. Численные методы решения обыкновенных ДУ	5/5/19	+	+	2	14,5
Раздел 10. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.	6/6/16	+		1	28
Раздел 11. Процедуры параметризации.	3/3/8		+	1	14
Итого	**28/28/88**	**92**	**52**		
Трудоемкость формирования компетенций	**144**				

$$t_{ср} = \frac{Количество\ часов\ (Л/ПР/ЛР/СРС)}{Общее\ количество\ компетенций}$$

Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы преподавателем по дисциплине в следующих формах:

- тестирование;
- семинары;
- практические работы
- письменные домашние задания;
- отдельно оцениваются личностные качества студента (аккуратность, исполнительность, инициативность)
- работа у доски, своевременная сдача тестов и письменных домашних заданий.

Рубежная аттестация студентов производится по окончании модуля в следующих формах:

- тестирование;
- контрольные работы;

Критерии пересчета результатов теста в баллы

Для всех тестов происходит пересчет рейтинга теста, в баллы по следующим критериям:

- рейтинг теста меньше 61% – 0 баллов,
- рейтинг теста 61-72 % –минимальный балл,
- рейтинг теста 73-85 % – средний балл
- рейтинг теста – 86-100% - максимальный балл

Промежуточный контроль по результатам семестров по дисциплине «Налоги и налогообложение» проходит в форме зачета и экзамена

Контроль и оценка результатов обучения при балльно - рейтинговой системы (БРС)

Показатели	Кол-во часов	Кол-во тестов, к/р	Баллы	ИТОГО
Посещение в т.ч. лекции и практические занятия лабораторная работа	56 28 - 28		0,25	8
Практические/ лабораторн.		10	5	50
Тесты по темам		2	5	25
Итоговая контрольная работа		1	5	5
Решение задач		7	2	12
ИТОГО				**100**

Критерии оценки уровня сформированности компетенций

Показатели	61-72 % «удовлетворительно»	73-85% «хорошо»	86-100% «отлично»

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные контрольные вопросы и задания для текущей и рубежной аттестации

Примерные вопросы

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы лектором и преподавателем, в следующих формах:

- тестирование;
- письменные домашние задания;
- выполнение лабораторных работ;
- защита лабораторных работ (тестирование);
- отдельно оцениваются личностные качества студента (аккуратность, исполнительность, инициативность) - работа у доски, своевременная сдача тестов, отчетов к лабораторным работам и письменных домашних заданий.

Рубежная аттестация студентов производится по окончании дисциплины или ее раздела в следующих формах:

- тестирование;
- контрольные работы

1. Примеры точных и приближённых чисел. Погрешность и предельная абсолютная погрешность.
2. Свойства абсолютной погрешности.
3. Свойства относительной погрешности.
4. Связь количества верных знаков числа и относительной погрешности.
5. Докажите, что абсолютная погрешность вычисления натурального логарифма числа равна относительной погрешности этой величины.
6. Докажите, что относительная погрешность sin(x) и cos(x) не превосходит относительной погрешности аргумента.
7. Метод бисекций для нахождения корней.
8. Метод хорд для нахождения корней.
9. Метод касательных для нахождения корней.
10. Комбинированный метод хорд и касательных для нахождения корней.
11. Метод простых итераций для нахождения корней.
12. Методы решения систем линейных уравнений (перечисление)
13. Зачем выбирают главный элемент в методе Гаусса?
14. Понятие обусловленности систем линейных уравнений.
15. Нормы в пространстве матриц.
16. Метод простых итераций для систем линейных уравнений.
17. Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Геометрическая интерпретация решения. Классическая форма записи задачи линейного программирования (ЛП). Базис опорного плана. Базисные переменные.
18. Симплекс-метод. Идея симплекс-метода. Формулы и условия перехода. Признаки прекращения счета. Табличный симплекс-метод. Формирование опорного базисного решения. Симплекс-таблица. Пересчет элементов таблицы. Отыскание решения.
19. Двойственная задача ЛП. Структура и свойства двойственной задачи. Транспортная задача ЛП.
20. Опорные планы транспортной задачи. Методы нахождения опорных планов. Решение транспортной задачи. Метод потенциалов.
21. Классификация численных методов. Основы теории погрешностей
    a. Численные методы. Требования устойчивости, сходимости, экономичности. Классификация численных методов по группам решаемых задач.
    b. Устранимая и неустранимая погрешности математического моделирования.
    c. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности.
    d. Погрешности арифметических операций.
    e. Прямая задача теории погрешностей (погрешности вычисления значений функции).

    f. Обратная задача теории погрешностей (определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции).
22. Численное решение нелинейных уравнений с одним неизвестным
    a. Методы отделения корней уравнения: графический способ, аналитический способ.
    b. Методы уточнения приближенных корней: метод дихотомии (половинного деления), метод хорд, метод Ньютона (касательных), метод секущих, метод простых итераций.
23. Численное решение систем уравнений
    a. Точные методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Халецкого, метод прогонки.
    b. Итерационные методы решения систем линейных уравнений: метод Якоби, метод Зейделя.
    c. Численное решение систем нелинейных уравнений: метод Ньютона, метод простой итерации.
24. Приближение функций
    a. Постановка задачи интерполирования.
    b. Полиномиальная интерполяция: интерполяционные формулы Ньютона, интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяции.
    c. Интерполирование функций сплайнами (кусочно-полиномиальная интерполяция). Оценка погрешности интерполирования кубическими сплайнами.
    d. Обратное интерполирование.
    e. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов.
    f. Равномерное приближение функций.
25. Численные методы оптимизации
    a. Методы одномерной безусловной оптимизации: метод половинного деления, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Пауэлла, метод секущих, метод касательной.
    b. Методы многомерной локальной безусловной оптимизации нулевого порядка: метод прямого поиска (метод Хука–Дживса), метод деформируемого многогранника (метод Нелдера–Мида), метод вращающихся координат (метод Розенброка), метод параллельных касательных (метод Пауэлла). Метод случайного поиска.
    c. Методы многомерной локальной безусловной оптимизации первого порядка: метод градиентного спуска, метод наискорейшего спуска, метод наискорейшего покоординатного спуска (метод Гаусса–Зейделя), метод сопряженных градиентов.
    d. Методы многомерной локальной безусловной оптимизации второго порядка: метод Ньютона, метод Ньютона–Рафсона.
    e. Методы локальной условной оптимизации: метод множителей Лагранжа (аналитический метод), метод Франка–Вулфа (линейные ограничения), методы штрафных (нелинейные ограничения) и барьерных функций (использование двойственности).
    f. Методы глобальной оптимизации (схемы перебора): метод Монте–Карло, метод ветвей и границ, метод динамического программирования.
26. Численное дифференцирование
    a. Некорректность операции численного дифференцирования. Формулы численного дифференцирования.
    b. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании (погрешность усечения и погрешность округления) и их оценка.

27. Численное интегрирование
    a. Численное интегрирование на основе формул Ньютона–Котеса: формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона (формула парабол), формула Ньютона.
    b. Методы статистических испытаний (методы Монте–Карло).
    c. Численное интегрирование на основе метода Гаусса.
28. Численное решение дифференциальных уравнений
    a. Аналитические приближенные методы решения задачи Коши: метод последовательного дифференцирования, метод неопределенных коэффициентов, метод последовательных приближений.
    b. Численные методы решения задачи Коши. Разностные схемы: метод Эйлера, симметричная схема, метод Адамса.
    c. Численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге–Кутта.
    d. Методы решения краевой задачи Коши: метод конечных разностей, метод прогонки.

Тематика контрольных заданий

Тема 1: Решение нелинейных уравнений

Решить уравнение

$$ax^5 + bx^3 + cx + d = 0$$

методами биссекций, хорд, касательных, комбинированным методом и методом итераций с точностью 0.005.

Сравнить скорость сходимости к решению.

Тема 2: Задачи линейного программирования

Задача о планировании выпуска продукции при ограниченных ресурсах

Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 ООО л алкилата, 1 200 ООО л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентола. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 90 ед. и 120 ед.

Дана система уравнений, нарисовать кривые, отвечающие каждому из уравнений, наметить начальное x_0, y_0 приближение к решению.

Методом простых итераций найти решение с точностью до 0.01.

Варианты:

Задача 2. Методом Симпсона с $n = 4$ найти интеграл.

Варианты:

Тема 3: Задачи нелинейного программирования и оптимизации

<u>*Задача 1.*</u>Дана функция $F(x, y)$. Методом градиентного спуска найти её минимум и максимум с точностью 0.01. В качестве начальной точки взять $x_0 = 0, y_0 = 0$.не

Варианты:

$F(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e \cdot xy$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0	1	2	1	2	1	2	0	3	2
b	1	0	3	2	1	1	0	2	0	-1

c	2	-2	0	3	-3	0	-1	2	1	0
d	-3	3	1	0	0	1	-3	1	-1	2
e	2	1	-2	-1	-2	1	2	2	2	3

Задача 2. Найти минимум и максимум функции

$$F(x,y)=x^2+\sin(x-1+0.1n\cdot y)e^{-1.n\cdot x^2-2y^2}$$

при условии $(x-0.n)^2+y^2=(1.n)^2$ для нечетного*пи*$(1-0.n)(x-0.n)^2+y^2=1$ для четного (***n***– последняя цифра в номере студенческого билета)

Контроль по результатам по дисциплине «Численные методы математического моделирования» проходит в форме зачета и п экзамена (включает в себя ответ на теоретические вопросы и решение задач)

Примерные вопросы к экзамену (ОПК-1,ОПК-3)

1. Примеры точных и приближённых чисел. Погрешность и предельная абсолютная погрешность.
2. Свойства абсолютной погрешности.
3. Свойства относительной погрешности.
4. Связь количества верных знаков числа и относительной погрешности.
5. Докажите, что абсолютная погрешность вычисления натурального логарифма числа равна относительной погрешности этой величины.
6. Докажите, что относительная погрешность sin(x) и cos(x) не превосходит относительной погрешности аргумента.
7. Метод бисекций для нахождения корней.
8. Метод хорд для нахождения корней.
9. Метод касательных для нахождения корней.
10. Комбинированный метод хорд и касательных для нахождения корней.
11. Метод простых итераций для нахождения корней.
12. Методы решения систем линейных уравнений.
13. Зачем выбирают главный элемент в методе Гаусса?
14. Понятие обусловленности систем линейных уравнений.
15. Нормы в пространстве матриц.
16. Метод простых итераций для систем линейных уравнений.
17. Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Геометрическая интерпретация решения. Классическая форма записи задачи линейного программирования (ЛП). Базис опорного плана. Базисные переменные.
18. Симплекс-метод. Идея симплекс-метода. Формулы и условия перехода. Признаки прекращения счета. Табличный симплекс-метод. Формирование опорного базисного решения.
19. Симплекс-таблица. Пересчет элементов таблицы. Отыскание решения.
20. Задачи оптимизации (аналитическое решение).
21. Сравнения методов градиентного и координатного спуска.
22. Метод итераций для систем нелинейных уравнений.
23. Условный экстремум. Множители Лагранжа.
24. Наибольшее/наименьшее значение функции в замкнутой области.
25. Методы оптимизации для многокритериальных задач
26. Расплывчатые цели и расплывчатые множества.
27. Численное решение дифференциальных уравнений.
28. Особые точки динамических систем на плоскости.

Примерный итоговый тест по дисциплине (ОПК-1,ОПК-3)

1. <u>В чем выражается обычно относительная погрешность?</u>
   А) В процентах (%)

Б) В процентах на единицу (%/ед.)
В) В штуках (шт)
Г) В х (х)

2. К несуществующим видам погрешностей относится
А) Неустранимая погрешность
Б) Погрешность метода
В) Вычислительная погрешность
Г) Результирующая погрешность

3. Предельная относительная погрешность произведения находится по формуле
А) $\delta(xy) = \delta x + \delta y$
Б) $\delta(xy) = \delta x - \delta y$
В) $\delta(xy) = \delta x * \delta y$
С) $\delta(xy) = \delta x / \delta y$

4. В чем заключается задача отделения корней?
А) В установлении количества корней
Б) В установлении количества корней, а так же наиболее тесных промежутков, каждый из которых содержит только один корень.
В) В установлении корня решения уравнения
Г) В назначении количества корней

5. К методам уточнения корней не относится …
А) Метод дихотомии
Б) Метод хорд
В) Метод касательных
Г) Метод аппроксимации

6. Суть комбинированного метода хорд и касательных?
А) Метод хорд и касательных дают приближения к корню с разных сторон.
Б) При реализации метода при каждой итерации необходимо вычислять не только значения F(x), но и ее производной.
В) Метод ограничивается вычислениями только значения F(x).
Г) Нет правильного ответа

7. К какой категории методов вычислительной математики относиться метод Гаусса?
А) Относится к первому классу точных задач.
Б) Относится ко второму классу приближенных методов.
В) Относится к точным методам.
Г) Относится к приближенным задачам.

8. Невязка – это…
А) Значение разностей между свободными членами исходной системы.
Б) Значение суммы между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных
В) Значение суммы результатов подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных
Г) Значение разностей между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных.

9. Задачу построения приближающей функции в общем смысле называют?

А) Равномерной
Б) Интерполяцией
В) Аппроксимацией
Г) Нет правильного ответа

10. <u>Интерполяция – это…</u>
А) Способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений
Б) Продолжение функции, принадлежащей заданному классу, за пределы ее области определения.
В) Замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близким к исходным.
Г) Метод решения задач, при котором объекты разного рода объединяются общим понятием.

11. <u>Интерполяция бывает:…</u>
А) Кусочная и локальная
Б) Локальная и глобальная
В) Кусочная и априорная
Г) Максимальная пи минимальная

12. <u>Итерация – это ….</u>
А) Повторение. Результат повторного применения какой–либо математической операции.
Б) Замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близким к исходным.
В) Число, изображаемое единицей и 18 нулями
Г) Продолжение функции, принадлежащей заданному классу, за пределы ее области определения.

13. <u>Найди в формуле интерполяционного многочлена Лагранжа ошибку</u>

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i-1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

А) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i-1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$

Б) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$

В) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_i)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-i})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$

Г) Нет ошибки в формуле

14. <u>Конечными разностями первого порядка называют</u>
А) Сумму соседних узлов интерполяций
Б) Разность между значениями функций в соседних узлах интерполяции
В) Сумму между значениями функций в соседних узлах интерполяции
Г) Произведение значений трех соседних узлов интерполяции

15. <u>Что это за формула</u> $I=\int_a^b f(x)dx$
А) Формула Ньютона - Лейбница
Б) Формула Ньютона - Котеса
В) Формула Симпсона

Г) Формулы не существует

16. Формула Симпсона – это…

А) $H_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{t(t-2)}{2t}dt$

Б) $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}(\frac{y_0+y_{2m}}{2}+2y_1+y_2+...+2y_{2m-1})$

В) $M_4\frac{|b-a|h^4}{180} \le \varepsilon$

Г) Формулы не существует

17. В основе какого метода лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной форме?

А) Метод Лагранжа

Б) Метод границ

В) Метод Коши

Г) Метод Эйлера

18. Формула Рунге-Кутта это:

А) $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$

Б) $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 3r_2 + 4r_3 + r_4)$

В) $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$

Г) $y_{i-1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$

19. Что является решением дифференциального уравнения?

А) Уравнение первого порядка

Б) Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

В) Уравнение второго порядка

Г) Уравнение второго порядка, разрешенное относительно производной

20. Золотое сечение – это…

А) Такое пропорциональное деление отрезка на части, при котором меньший отрезок относится к большему, как больший ко всему.

Б) Непропорциональное деление отрезка на части, при котором меньший отрезок относится к большему, как больший ко всему.

В) Непропорциональное деление отрезка на части, при котором больший отрезок относится к меньшему, как больший ко всему.

Г) Такое пропорциональное деление отрезка на части, при котором больший отрезок относится к меньшему, как больший ко всему.

21. Формула золотого сечения при решении минимизации?

А) $x_1 = b + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-c) = ... = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$

Б) $y_1 = c + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-c) = ... = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$

В) $x_1 = c + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-c) = \ldots = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$

Г) $x_1 = c - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b+c) = \ldots = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$

22. Пусть a=2,91385 и $\Delta a = 0{,}0097$. Тогда в числе a верны в широком смысле:

А) 2,9,1
Б) 2,9
В) 9,1
Г) Все цифры

23. Погрешность разности чисел x=62,425 и y=62,409, у которых все числа верны в строгом смысле, равна

А) 0,09
Б) 1
В) 0,07
Г) 0,12

24. Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке:

А) [1; 1.5]
Б) [0; 0.5]
В) [-1;1]
Г) [-1; 0.5]

25. Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41 \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44 \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56 \end{cases}$ будет

А) (0,967; -4,816; 2,293)
Б) (0 ;0 ;0)
В) (0,25;0,15;-0,12)
Г) (-11;0;2)

Примерные задачи предлагаемые во время экзамена (ОПК-1,ОПК-3)

1. Найдите решение СЛАУ методом Зейделя, сделайте 3 шага, оцените невязки:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Найдите решение задачи Коши в трех точках методом Эйлера и разложением в ряд Тейлора (h = 0.1):

$$y' = 4y(1+x),\ x \in [0;1],\ y(0) = 1.0.$$

3. Решить краевую задачу $y'' - xy' + 2xy = 0$, $y'(1) = 0, y(4) = -1$.

4Решить краевую задачу $y'' - y = x$, $y(0) = 0, y(1) = 0$.

5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{1.5} 3x^9 \sin(20x^8) e^{\sqrt{x^6+3}} dx$.

6. Решить уравнение $\sqrt{25 - x^2} = arctg\, 2x$.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций. Критерии оценки знаний студентов на экзамене.

Критерии оценки знаний студентов на экзамене

Оценки **«отлично»** заслуживает студент, *за реализацию всех необходимых компетенций* при ответах на вопросы экзаменационного билета: студент показал всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка «отлично» выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. Правильно решена задача. Дан верный ответ на тестовый вопрос. Соблюдаются нормы литературной и профессиональной речи, *подтвердив своими ответами сформированность компетенций, предусмотренных ФГОС (высокий уровень).*

Оценки **«хорошо»** заслуживает студент обнаруживший полное знание учебно-программного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка «хорошо» выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности. Задача решена с несущественными ошибками в расчетах. Дан верный ответ на тестовый вопрос. *Студент подтвердил своими ответами сформированность компетенций, предусмотренных ФГОС, на достаточном уровне.*

Оценка «удовлетворительно». Допускаются нарушения в последовательности изложения. Демонстрируются поверхностные знания вопроса, а имеющиеся практические навыки с трудом позволяют решать конкретные задачи с существенными ошибками в расчетах. На тестовый вопрос дан не верный ответ. Имеются затруднения с выводами. Допускаются нарушения норм литературной и профессиональной речи, демонстрируя тем самым *частичную (на среднем уровне) сформированность компетенций, предусмотренных ФГОС.*

Оценка «неудовлетворительно». Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по программному материалу. На тестовый вопрос дан не верный ответ. Задача решена не верно. Имеются заметные нарушения норм литературной и профессиональной речи, непонимание сущности излагаемых вопросов; неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы, что *демонстрирует несформированность (низкий уровень) у выпускника соответствующих компетенций, предусмотренных ФГОС.*

Критерии оценивания решения задачи:

«отлично» ставится в случае, если решение содержит
- все необходимые этапы, каждый из которых не содержит ошибок;
- развернутые ответы и грамотные комментарии,
- правильно используется терминология и математические символы.

«хорошо» ставится в случае, если решение содержит все необходимые этапы, некоторые из которых могут содержать ошибки вычислительного характера, которые не оказали существенного влияния на дальнейшее решение;

- решение не содержит необходимых комментариев, обоснований выводов и переходов от одного этапа решения к другому;

«удовлетворительно» ставится в случае, если неверно используются символьный аппарат и терминология при правильном решении.

- в решении пропущены некоторые необходимые этапы без какого-либо комментария;
- в решении допущены ошибки в вычислениях, повлекшие за собой неверные выводы и ответы, но при этом сами выводы сделаны верно с учетом данных ошибок.
- промежуточные этапы проведены верно, но при этом либо ответ не соответствует постановке задачи, либо требуемое в постановке задачи вообще не найдено.

«неудовлетворительно» ставится в случае, если:

- студент показал знание алгоритма решения, провел решение по алгоритму, но этапы решения содержали существенные ошибки.
- решение содержит менее трети необходимых этапов, но при этом хотя бы один из этапов выполнен верно;
- студент показал знание алгоритма, проведя по нему решение, но при этом ни один из этапов не был выполнен правильно.

Требования к выполнению и оформлению лабораторных работ

Общие требования к выполнению лабораторных работ:

1. изучение теоретического материала;
2. выполнение заданий;
3. ответы на контрольные вопросы.

Форма отчетности:

лабораторные работы должны оформляться в отдельной тетради и содержать:

- номер и название работы;
- цель работы;
- подробное описание хода выполнения заданий;

краткие ответы на контрольные вопросы.

Форма отчетности работ:

Результатом выполнения лабораторных работ является устная защита с предъявлением оформленной работы в тетради.

Критерии оценки лабораторных работ

Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются:

1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям;
2. Структурирование и комментирование лабораторной работы;
3. Уникальность выполнение работы (отличие от работ коллег);
4. Успешные ответы на контрольные вопросы.

«5 баллов» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов.

«4 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По дисциплине «Численные методы математического моделирование» рабочим учебным планом предусмотрены следующие виды учебных занятий: лекции, практические, семинарские, лабораторные занятия, самостоятельная работа студентов.

Формы работы со студентами: опросы и тестирование в ходе лекционных занятий, работа на семинарских занятиях (консультации при составлении докладов, решение и разбор задач, подведение итогов обсуждений).

Практические занятия являются логическим продолжением изучения той или иной темы дисциплины. Поэтому при подготовке к ним важно повторить теоретический материал по теме занятия, используя материалы лекций, рекомендуемые учебники и учебные пособия. Без такой целенаправленной самостоятельной работы студентам затруднительно выполнять практические задания, решать ситуационные задачи на практических занятиях.

Непременным условием успешной учебной деятельности студентов является не только активная работа в аудитории, но и целенаправленная **самостоятельная работа**, предусмотренная учебным планом. Она призвана способствовать более глубокому усвоению изучаемой дисциплины, формировать навыки информационно-эвристической и аналитической работы, а также ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике. В ходе самостоятельной работы студентам важно выработать навыки самостоятельного поиска источников информации, умелого их использования при доработке конспектов лекций, подготовке к семинарским и практическим занятиям и постепенно перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя, к деятельности, организуемой самостоятельно, к полной замене контроля со стороны преподавателя самоконтролем.

Самостоятельная работа студентов должна носить систематический характер.

Проработка учебного материала после проведенных лекционных занятий осуществляется по конспектам лекций с привлечением учебной и научной литературы, нормативных документов в соответствии со списком рекомендованной литературы к каждой изучаемой теме.

Первый шаг в самостоятельной работе студентов: после лекционного занятия в этот же день изучить конспект лекции и осмыслить прочитанное, выделить места, вызывающие дополнительные вопросы. Затем, обратившись к перечню рекомендованной, основной и дополнительной литературы по данной теме, дополнить конспект лекции, сделать необходимые выписки из нормативных документов; с помощью опорных конспектов разобраться в примерах, приведенных в учебниках. В результате такой работы должно сложиться понимание основных вопросов темы.

Правильно и своевременно выполненная самостоятельная работа способствует развитию рациональных приемов познавательной деятельности в процессе изучения дисциплины «Численные методы математического моделирования». В последующем, на практических занятиях, происходит углубление и расширение знаний, полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы, выясняются и все неясные вопросы. Самостоятельная работа не ограничивается только подготовкой к практическим занятиям. Она может продолжаться и в после их проведения. В этом случае она нацелена на более глубокое освоение учебной дисциплины «Численные методы математического моделирования» сверх учебной программы.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По дисциплине «Численные методы математического моделирования» рабочим учебным планом предусмотрены следующие виды учебных занятий: лекции, практические, семинарские, лабораторные занятия, самостоятельная работа студентов.

Формы работы со студентами: опросы и тестирование в ходе лекционных занятий.

Практические занятия являются логическим продолжением изучения той или иной темы дисциплины. Поэтому при подготовке к ним важно повторить теоретический материал по теме занятия, используя материалы лекций, рекомендуемые учебники и учебные пособия.

Непременным условием успешной учебной деятельности студентов является не только активная работа в аудитории, но и целенаправленная **самостоятельная работа**, предусмотренная учебным планом. Она призвана способствовать более глубокому усвоению изучаемой дисциплины, формировать навыки информационно-эвристической и аналитической работы, а также ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике. В ходе самостоятельной работы студентам важно выработать навыки самостоятельного поиска источников информации, умелого их использования при доработке конспектов лекций, подготовке к семинарским и практическим занятиям и постепенно перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя, к деятельности, организуемой самостоятельно, к полной замене контроля со стороны преподавателя самоконтролем.

Самостоятельная работа студентов должна носить систематический характер.

Проработка учебного материала после проведенных лекционных занятий осуществляется по конспектам лекций с привлечением учебной и научной литературы.

Первый шаг в самостоятельной работе студентов: после лекционного занятия в этот же день изучить конспект лекции и осмыслить прочитанное, выделить места, вызывающие дополнительные вопросы. Затем, обратившись к перечню рекомендованной, основной и дополнительной литературы по данной теме, дополнить конспект лекции, сделать необходимые выписки из нормативных документов; с помощью опорных конспектов разобраться в примерах, приведенных в учебниках. В результате такой работы должно сложиться понимание основных вопросов темы.

Правильно и своевременно выполненная самостоятельная работа способствует развитию рациональных приемов познавательной деятельности в процессе изучения дисциплины «Численные методы математического моделирования». В последующем, на практических занятиях, происходит углубление и расширение знаний, полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы, выясняются и все неясные вопросы. Самостоятельная работа не ограничивается только подготовкой к практическим занятиям. Она может продолжаться и в после их проведения. В этом случае она нацелена на более глубокое освоение учебной дисциплины «численные методы математического моделирования» сверх учебной программы.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

7.1. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. *Пименов, В. Г.* Численные методы в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 111 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04681-6. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/E2DB1B52-AC50-4959-9E63-7FFE2239DC88
2. *Пименов, В. Г.* Численные методы в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 107 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04683-0. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/513A504B-789E-49C9-B42D-A5961E985F14
3. *Лобанов, А. И.* Математическое моделирование нелинейных процессов : учебник для академического бакалавриата / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 255 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-8897-0. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/C7FE0C81-16DA-445E-8656-3A19CFB1170

Дополнительная литература:

1. *Аверина, Т. А.* Численные методы. Алгоритмы моделирования систем со случайной структурой : учебное пособие для вузов / Т. А. Аверина. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 156 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-07204-4. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/3D5C7976-9D6D-4302-9858-6E6C4CF3CDAB
2. *Зенков, А. В.* Численные методы : учебное пособие для прикладного бакалавриата / А. В. Зенков. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 122 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-02322-0. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/2CBD97B2-F5FC-4B54-B3EC-228DA59DA4A5
3. *Магомедов, К. М.* Сеточно-характеристические численные методы : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / К. М. Магомедов, А. С. Холодов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 287 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04220-7. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/8CFE2E92-12A2-4C5D-854D-5FB6BC82811C

1. *Михайлов, Г. А.* Статистическое моделирование. Методы монте-карло : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 371 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-06881-8. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/8365BAAE-9AD1-41C9-B9AB-FE76294A1034

Емельянов, В. Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем : учебное пособие для академического бакалавриата / В. Н. Емельянов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство

Юрайт, 2018. — 188 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-06617-3. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/5A97B60B-81DD-46CA-A884-DB21BDE8C603

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Интернет-ресурсы:

1. Федеральный портал «Российское образование» www.edu.ru;
2. Официальный сайт Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации – www.mnr.gov.ru

Электронные библиотечные ресурсы:

1. Электронно-библиотечная система РГГМУ - elib.rshu.ru.
2. Информация электронной библиотечной системы znanium.com.
3. Электронная библиотека образовательных и научных изданий: www.iqlib.ru.
4. Научная электронная библиотека http://elibrary.ru

7.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Программное обеспечение:

1. Операционная система Windows XP, Microsoft Office 2007
2. Программы электронных таблиц Excel
3. Текстовый редактор Word
4. Программа для создания презентаций Power Point
5. Программа распознавания текста FineReader
6. Антивирусная система Kaspersky

Информационные справочные системы:

1. СПС Консультант Плюс

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лекционные аудитории оборудованы видеопроекционным оборудованием для презентаций, средствами звуковоспроизведения, экраном, персональным компьютером с выходом в сеть Интернет; помещения для проведения семинарских и практических занятий оборудованы учебной мебелью; библиотека имеет рабочие места для студентов; компьютерные классы оснащены видеопроекционным оборудованием, средствами звуковоспроизведения, экраном, персональными компьютерами с выходом в сеть Интернет.

9.Особенности освоения дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

При определении формы проведения занятий с обучающимся-инвалидом учитываются рекомендации, содержащиеся в индивидуальной программе реабилитации инвалида, относительно рекомендованных условий и видов труда.

При необходимости для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья создаются специальные рабочие места с учетом нарушенных функций и ограничений жизнедеятельности.

Приложение 1

Аннотация рабочей программы
«Численные методы математического моделирования»

«Численные методы математического моделирования» является одной из дисциплин базовой части блока 1 подготовки студентов по направлению подготовки 05.03.05. «Прикладная гидрометеорология», профиль «Прикладная метеорология». Дисциплина реализуется в филиале РГГМУ в г. Туапсе, кафедрой «Метеорологии, экологии и экономического обеспечения деятельности предприятий природопользования».

Целью дисциплины «Численные методы математического моделирования» является подготовка будущих бакалавров, владеющих знаниями в объёме, необходимом для глубокого понимания принципов построения и функционирования гидродинамических моделей атмосферы, способных создавать гидродинамические модели атмосферных процессов и граммотно использовать результаты моделирования.

Изучение дисциплины «Численные методы математического моделирования» базируется на знаниях студентов, полученных в результате усвоения курсов математики, теории вероятностей и математической статистики, информатики, физики атмосферы, океана и вод суши, методов и средств измерений гидрометеорологической информации и др.
Дисциплина нацелена на формирование общекультурных общепрофессиональных компетенций ОПК-1, ОПК-3.

Содержание дисциплины.

Приближенные числа и действия над ними.
Системы координат, используемые в гидродинамических моделях атмосферы.
Интерполяция функций.
Численное решение нелинейных уравнений.
Система уравнений гидродинамики атмосферы.
Численное решение систем линейных уравнений.
Численное решение систем нелинейных уравнений.
Основы спектрального метода интегрирования уравнений.
Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме тестирования, контрольных работ, и промежуточный контроль в форме зачета и экзамена.

Общая трудоемкость дисциплины при очном обучении составляет 4 зачетных единиц, 144 часа.

Очная форма обучения: Контактная работа составляет 56 часов: 28 – лекции, 28 - лабораторные, самостоятельная работа – 88 часов.

Заочная форма обучения: Контактная работа составляет 14 часов: 6 – лекции,, 8- лабораторные, самостоятельная работа – 130 часов.